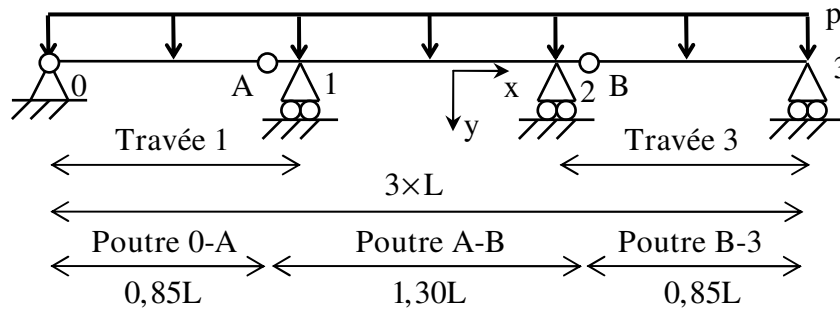


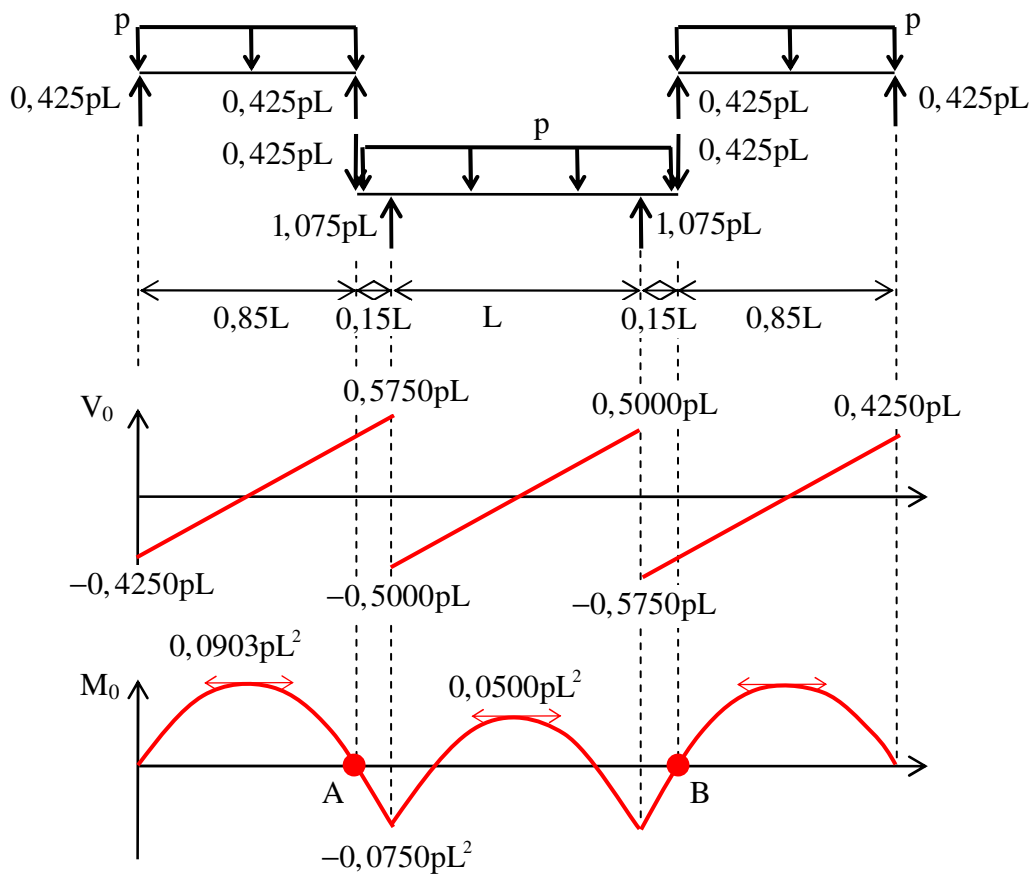
Résistance des matériaux – Test 2 sujet

On considère une poutre cantilever uniformément chargée :



Cette structure sera réalisée en 3 poutres : 0-A A-B et B-3

Sollicitations correspondantes :



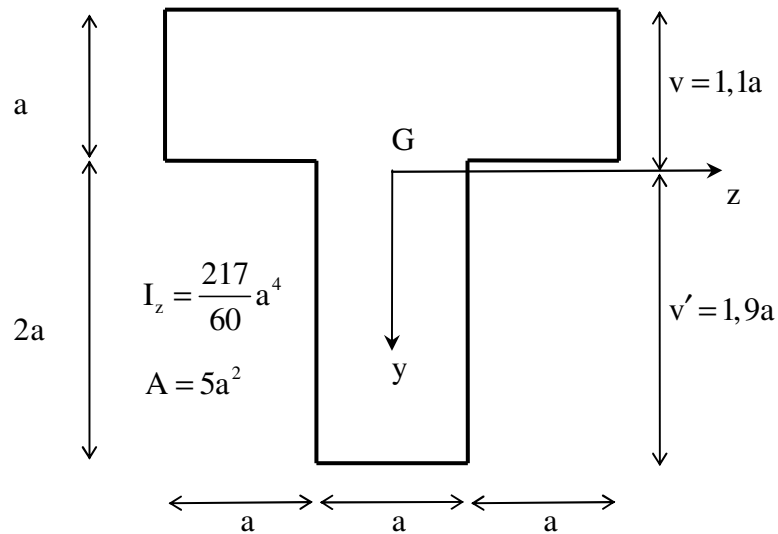
Application numérique :

$p = 40 \text{ kN/m}$

$L = 9 \text{ m}$

Partie I : Section en T

Soit le profil suivant :



Critère mécanique : $-\sigma_e = -20 \text{ MPa} \leq \sigma \leq \sigma_e = 20 \text{ MPa}$

1. Calculer la position et la valeur du moment maximum sur la poutre cantilever
2. Déterminer en fonction de a la répartition des contraintes normales dans la section la plus sollicitée.
3. En appliquant le critère mécanique : déterminer la valeur minimum de a

On prend pour la suite $a = 20 \text{ cm}$

4. Tracer la répartition des contraintes normales dans la section la plus sollicitée
5. Quelle charge répartie p_{\max} peut reprendre cette poutre.
6. Démontrer qu'un noyau central passe toujours par un point bas $y_c = \frac{i_z^2}{v}$ et un point

$$\text{haut } y_c = -\frac{i_z^2}{v'}$$

7. Déterminer ces valeurs pour la section en T
8. Compléter la répartition des contraintes tangentes (valeurs numériques) sous l'hypothèse des sections massives (Document réponse I)
9. Comparer avec une solution MMC

Partie II : Section en T et précontrainte

L'étude porte sur la poutre OA

La section en T est la précédente avec $a = 20 \text{ cm}$

On introduit une précontrainte P avec une excentricité variable $e(x)$

(Document réponse II)

La poutre sera étudiée avec les 2 cas de charge :

- Précontrainte : \mathbf{P}
- Précontrainte et chargement : $\mathbf{P} + \mathbf{M}_0$

Critère mécanique : $-\sigma_L = -20 \text{ MPa} \leq \sigma \leq 0 \text{ MPa}$

Sollicitations :

Cas de charge P : $N(x) = P$ $M(x) = -Pe(x)$

Cas de charge P + M₀ : $N(x) = P$ $M(x) = M_0(x) - Pe(x)$

10. Déterminer les expressions analytiques des contraintes en fibre supérieure et inférieure sous les 2 cas de charge : $\sigma_{\text{sup}}(P)$, $\sigma_{\text{inf}}(P)$, $\sigma_{\text{sup}}(P + M_0)$ et $\sigma_{\text{inf}}(P + M_0)$

Présenter vos résultats dans un tableau

Condition de coffrage :

A l'aide de $-\sigma_L \leq \sigma_{\text{inf}}(P)$ et de $\sigma_{\text{inf}}(M_0 + P) \leq 0$

11. Donner une condition sur $\frac{I_z}{v'}$ en fonction de $M_0(x)$ et σ_L

12. Vérifier cette condition pour tout x (toutes sections)

Fuseau de passage de traction :

On cherche à déterminer une minoration et majoration de $e(x)$ définissant la position possible du câble de précontrainte.

13. A l'aide de $\sigma_{\text{sup}}(P) \leq 0$ donner l'expression de e_{max} tel que $e(x) \leq e_{\text{max}}$

14. A l'aide de $\sigma_{\text{inf}}(M_0 + P) \leq 0$ donner l'expression de e_{min} tel que $e(x) \geq e_{\text{min}}$

15. Donner une interprétation en $x = 0$

Ce fuseau de passage doit être ouvert : $e_{\text{min}} \leq e_{\text{max}}$

16. En déduire l'expression de P_I tel que $P \geq P_I$

Ce fuseau de passage doit être dans la section avec une marge d' : $e_{\text{min}} \leq v' - d'$

(Document réponse II)

17. En déduire l'expression de P_{II} tel que $P \geq P_{II}$

Remarque :

Si $P_I \geq P_{II}$ la section est dite sous critique

Si $P_I \leq P_{II}$ la section est dite sur critique

Application numérique : $d' = 10\text{cm}$ $P = 1500\text{ kN}$

Excentricité de précontrainte de la forme :

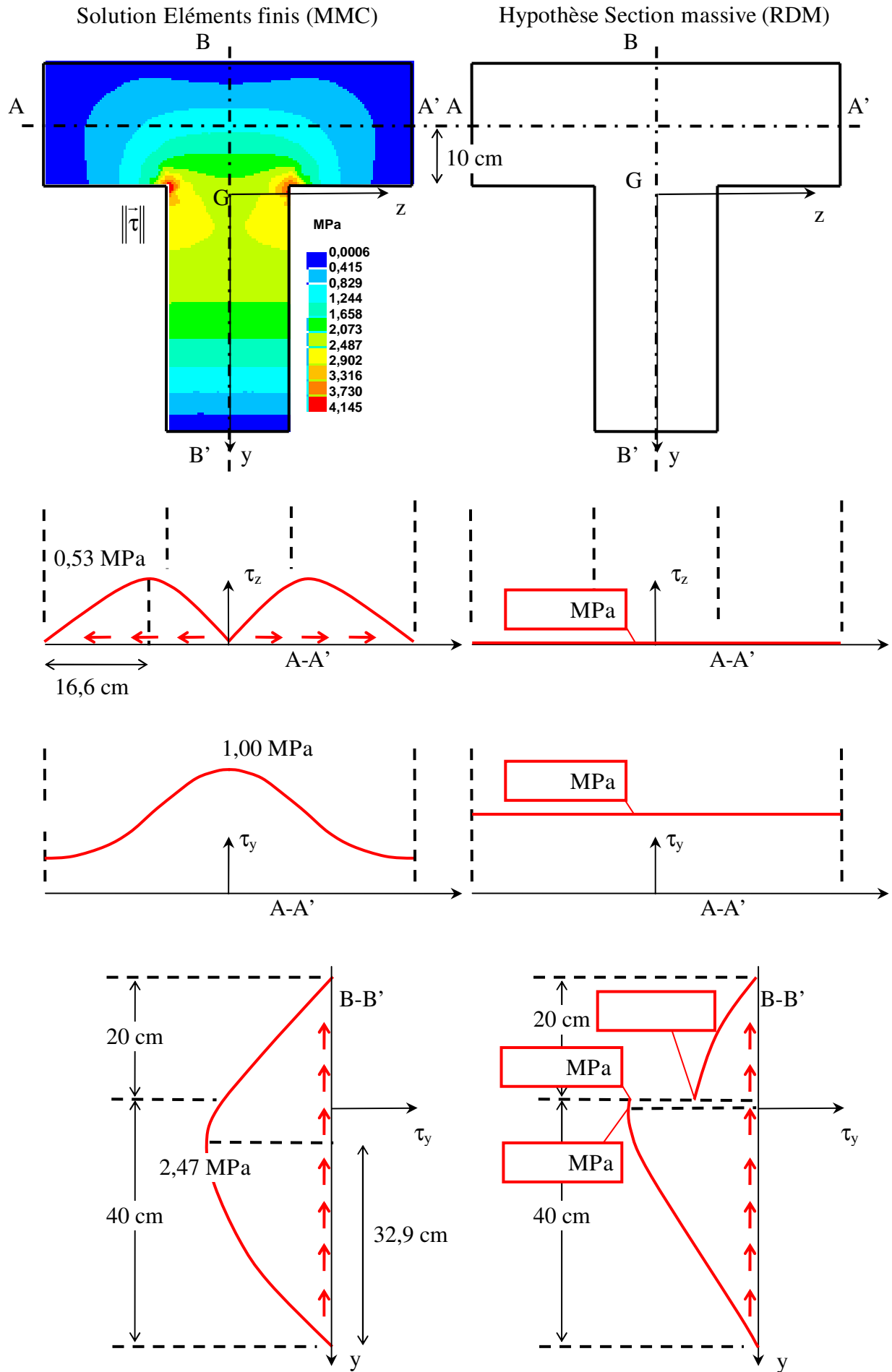
$e(x)$ Parabolique avec $e(0) = e(0,85L) = 0$ et $e\left(\frac{0,85L}{2}\right) = 12\text{ cm}$ (Document réponse II)

18. Vérifier la précontrainte en calculant P_I et P_{II}

19. Tracer le fuseau de passage sur le document réponse II

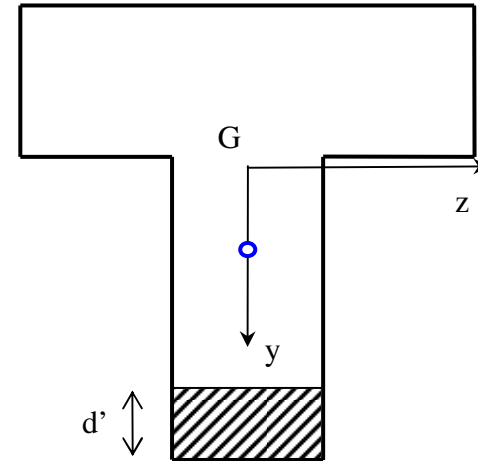
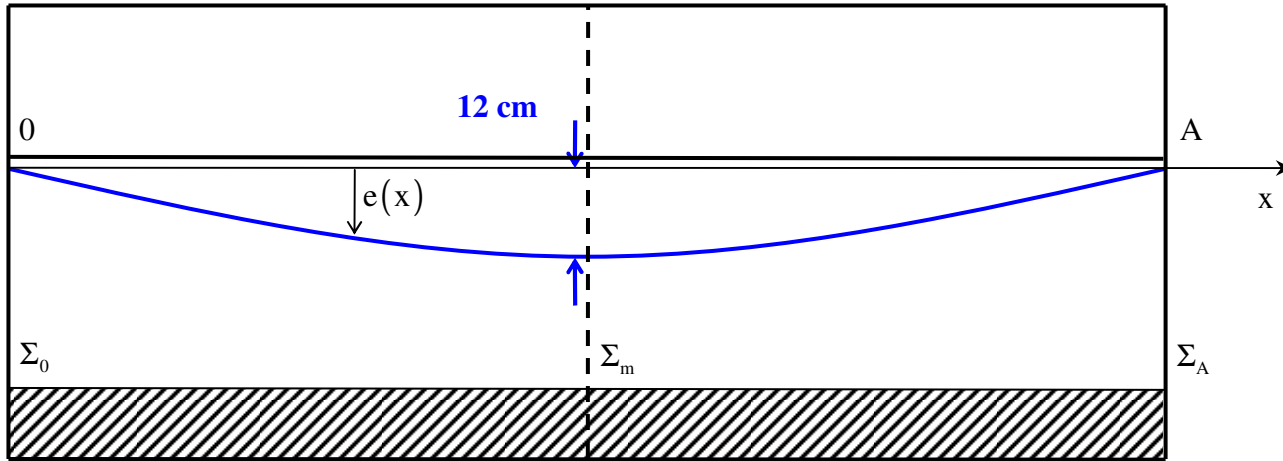
20. Tracer la répartition des contraintes normales dans la section origine et la section médiane sous les 2 cas de charge (Document Réponse II)

Document Réponse I



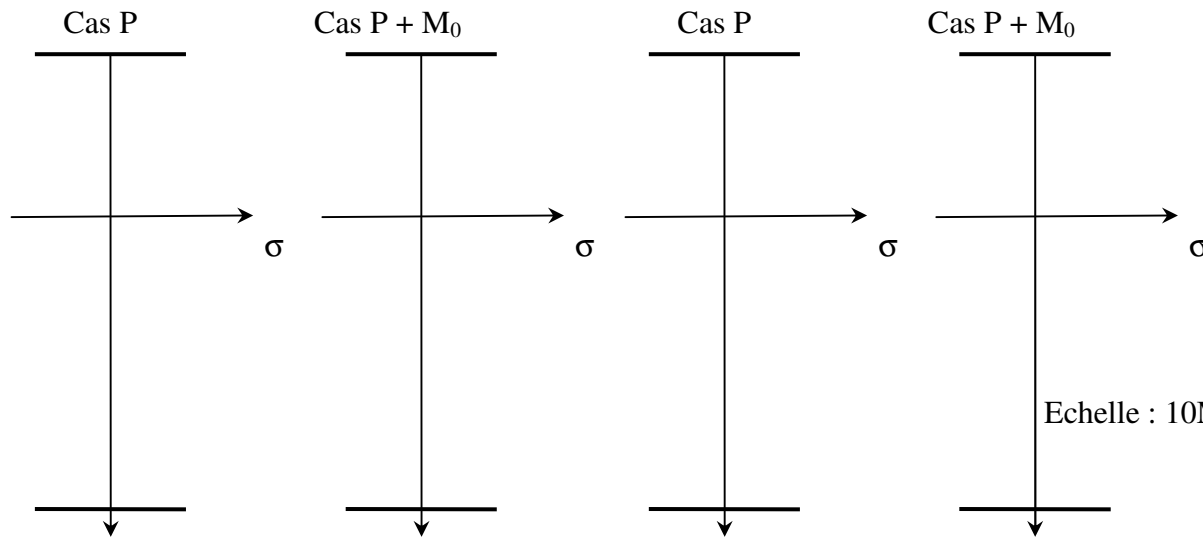
Document Réponse II

Echelle x : 1/50
 y : 1/10

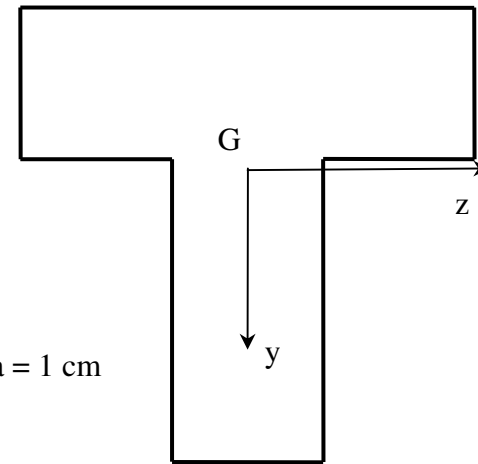


Section origine Σ_0

Section médiane Σ_m



Echelle : 10MPa = 1 cm

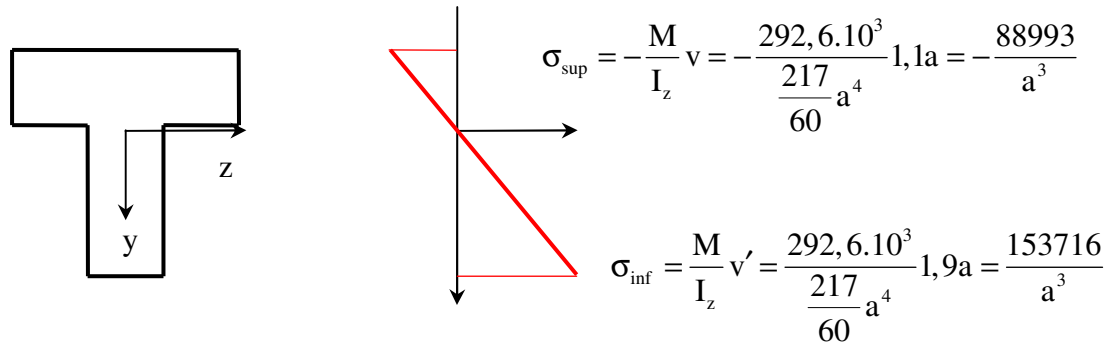


Partie I : Section en T

1. Position et valeur du moment maximum sur la poutre cantilever :

$$x = \frac{0,85L}{2} = 3,825 \text{ m} \quad M = 0,0903pL^2 = 292,6 \text{ kN.m}$$

2. Répartition des contraintes normales dans la section la plus sollicitée :



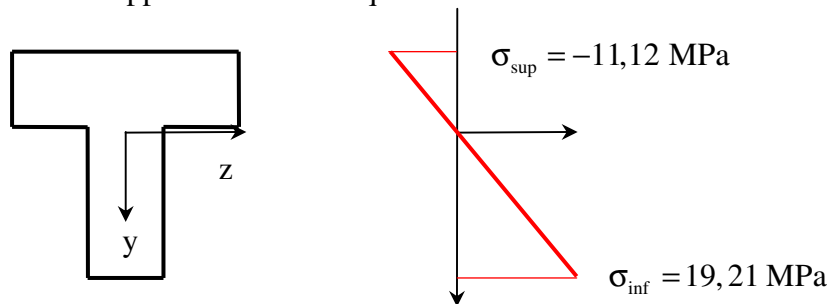
3. Valeur minimum de a

$$\sigma_{\text{inf}} \leq 20 \text{ MPa}$$

$$\frac{153716}{a^3} \leq 20 \cdot 10^6 \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{153716}{20 \cdot 10^6}} = 0,197 \text{ m} \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{153716}{20 \cdot 10^6}} = 0,197 \text{ m}$$

On prend pour la suite a = 20 cm

4. Application numérique :



5. Charge répartie $p_{\text{max}} = \frac{20}{19,21} 40 = 41,6 \text{ kN/m}$

6. Noyau central

Axe neutre : $y = -v$

$$1 + \frac{y}{v} = 0 \text{ à identifier avec } 1 + \frac{y_c}{i_z^2} y = 0$$

$$y_c = \frac{i_z^2}{v} \text{ et } z_c = 0$$

Axe neutre : $y = v'$

$$1 - \frac{y}{v'} = 0 \text{ à identifier avec } 1 + \frac{y_c}{i_z^2} y = 0$$

$$y_c = -\frac{i_z^2}{v'} \text{ et } z_c = 0$$

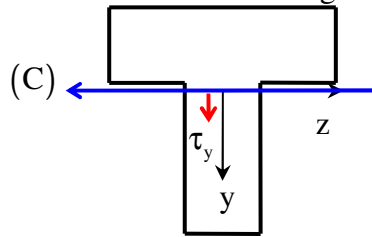
7. Valeurs pour la section en T

$$y_c = \frac{i_z^2}{v} = 0,1315 \text{ m} \quad y_c = -0,0761 \text{ m}$$

8. Répartition des contraintes tangentées (Document réponse I)

$$V_{\text{max}} = 0,5750pL = 207,00 \text{ kN}$$

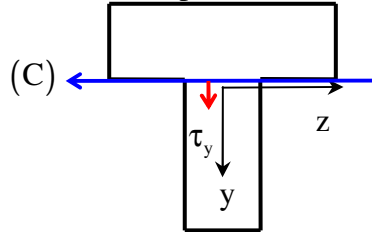
Au niveau du centre de gravité :



$$S_z(\Sigma^+) = \frac{1,9^2 a^3}{2} = 0,01444 \text{ m}^3$$

$$\tau_y(0) = -2,583 \text{ MPa}$$

Au niveau supérieur de la nervure (largeur a=20 cm) :

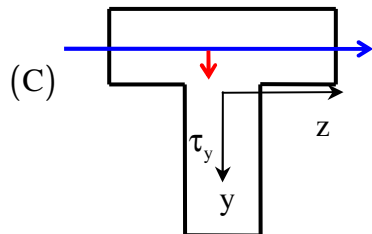


$$S_z(\Sigma^+) = 2 \times 0,9 a^3 = 0,01440 \text{ m}^3$$

$$\tau_y(-0,1.a^+) = -2,576 \text{ MPa}$$

$$\tau_y(-0,1.a^-) = -0,859 \text{ MPa}$$

Au milieu de la table de compression :



$$S_z(\Sigma^+) = -\frac{a}{2} 3a \frac{0,6a + 1,1a}{2} = -1,275 a^3$$

$$\tau_y(-0,6.a) = -0,608 \text{ MPa}$$

9. Comparaison avec une solution MMC

La section n'est ni massive ni un profil mince.

Beaucoup de différences :

- Le vecteur contrainte n'est pas tangent au bord
- Il n'y a pas de continuité
- Le maximum est très différent : 2,583 MPa \neq 4,145 MPa

Partie II : Section en T et précontrainte

Sollicitations :

Cas de charge P : $N(x) = P$ $M(x) = -Pe(x)$

Cas de charge P + M₀ : $N(x) = P$ $M(x) = M_0(x) - Pe(x)$

10. Expressions analytiques des contraintes en fibre supérieure et inférieure sous les 2 cas de charge : $\sigma_{\text{sup}}(P)$, $\sigma_{\text{inf}}(P)$, $\sigma_{\text{sup}}(P + M_0)$ et $\sigma_{\text{inf}}(P + M_0)$

	P	P + M ₀
σ_{sup}	$\sigma_{\text{sup}}(P) = -\frac{P}{A} - \frac{-Pe(x)}{I_z} v$	$\sigma_{\text{sup}}(M_0 + P) = -\frac{P}{A} - \frac{M_0(x) - Pe(x)}{I_z} v$
σ_{inf}	$\sigma_{\text{inf}}(P) = -\frac{P}{A} + \frac{-Pe(x)}{I_z} v'$	$\sigma_{\text{inf}}(M_0 + P) = -\frac{P}{A} + \frac{M_0(x) - Pe(x)}{I_z} v'$

Condition de coffrage :

11. Donner une condition sur $\frac{I_z}{v'}$ en fonction de $M_0(x)$ et σ_L

$$\sigma_{\text{inf}}(M_0 + P) \leq 0 \quad -\frac{P}{A} + \frac{M_0(x) - Pe(x)}{I_z} v' \leq 0$$

$$-\sigma_L \leq \sigma_{\text{inf}}(P) \quad -\sigma_L \leq -\frac{P}{A} + \frac{-Pe(x)}{I_z} v' \leq -\frac{M_0(x)}{I_z} v'$$

$$\frac{I_z}{v'} \geq \frac{M_0(x)}{\sigma_L}$$

12. Vérifier cette condition pour tout x (toutes sections)

$$\text{Vérifier } \frac{I_z}{v'} \geq \frac{292,6 \text{ kN.m}}{\sigma_L} \quad 0,0152 \geq 0,0146$$

Fuseau de passage de traction :

13. A l'aide de $\sigma_{\text{sup}}(P) \leq 0$ donner l'expression de e_{max} tel que $e(x) \leq e_{\text{max}}$

$$-\frac{P}{A} - \frac{-Pe(x)}{I_z} v \leq 0 \quad e(x) \leq \frac{I_z}{vA} = e_{\text{max}}$$

14. A l'aide de $\sigma_{\text{inf}}(M_0 + P) \leq 0$ donner l'expression de e_{min} tel que $e(x) \geq e_{\text{min}}$

$$-\frac{P}{A} + \frac{M_0(x) - Pe(x)}{I_z} v' \leq 0 \quad e(x) \geq \frac{M_0(x)}{P} - \frac{I_z}{v'A} = e_{\text{min}}$$

15. Donner une interprétation en $x = 0$

Seule la précontrainte est présente, pour ne pas avoir de contraintes de traction la précontrainte doit être dans le noyau central qui correspond à e_{min} et e_{max}

Ce fuseau de passage doit être ouvert : $e_{\text{min}} \leq e_{\text{max}}$

16. Expression de P_I tel que $P \geq P_I$

$$\frac{M_0(x)}{P} - \frac{I_z}{v'A} \leq \frac{I_z}{vA} \quad P \geq \frac{vv'A}{I_z} \frac{M_0(x)}{v+v'} = P_I$$

Ce fuseau de passage doit être dans la section avec une marge d' : $e_{\text{min}} \leq v' - d'$

17. Expression de P_{II} tel que $P \geq P_{II}$

$$\frac{M_0(x)}{P} - \frac{I_z}{v'A} \leq v' - d'' \quad P \geq \frac{M_0(x)}{v' - d' + \frac{I_z}{v'A}} = P_{II}$$

Application numérique : $d' = 10\text{cm}$ $P = 1500 \text{ kN}$

Excentricité de précontrainte de la forme :

$$e(x) \text{ Parabolique avec } e(0) = e(0,85L) = 0 \text{ et } e\left(\frac{0,85L}{2}\right) = 12 \text{ cm (Document réponse II)}$$

18. Vérifier la précontrainte en calculant P_I et P_{II}

$$P_I = 1408,9 \text{ kN} \quad P_{II} = 884,2 \text{ kN} \quad P = 1500 \text{ kN} \geq (P_I, P_{II})$$

La section est sous critique

19. Fuseau de passage sur le document réponse II

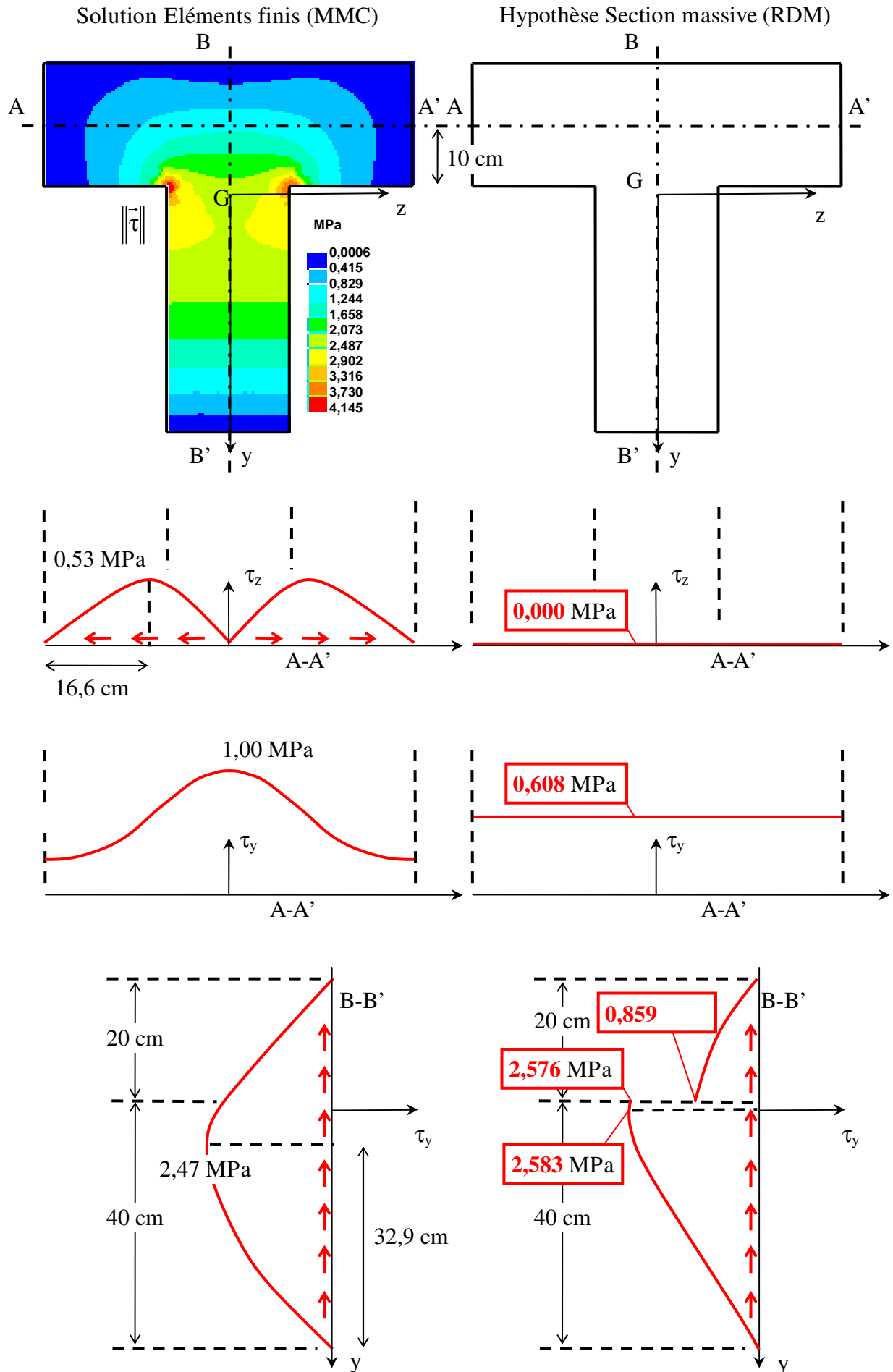
$$e(x) \leq \frac{I_z}{vA} = e_{\text{max}} \quad e_{\text{max}} = 13,15\text{cm}$$

$$e(x) \geq \frac{M_0(x)}{P} - \frac{I_z}{v'A} = e_{\text{min}} \quad \text{en } x = \frac{0,85L}{2} \quad e(x) \geq -7,61 \text{ cm}$$

$$\text{en } x = 0 \quad e(x) \geq 11,89 \text{ cm}$$

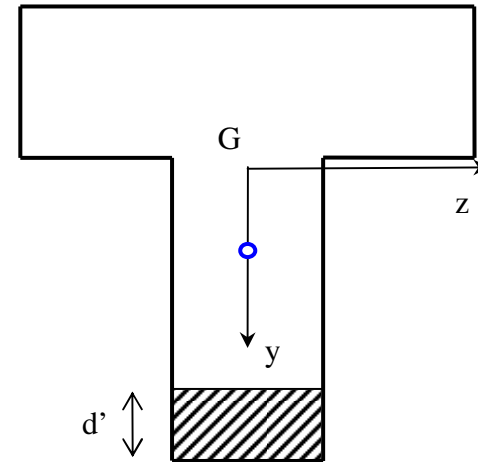
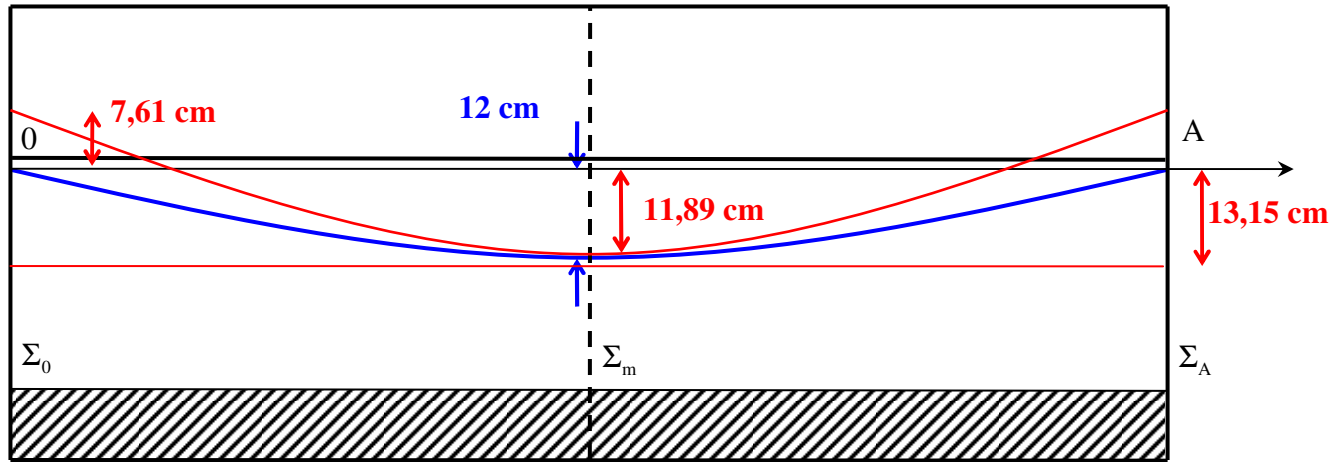
20. Répartition des contraintes normales dans la section origine et la section médiane sous les 2 cas de charge (Document Réponse II)

Document Réponse I



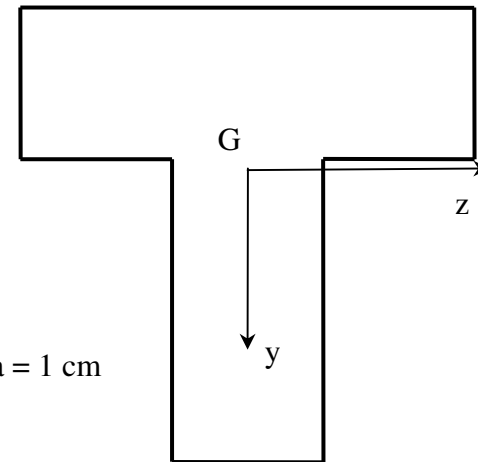
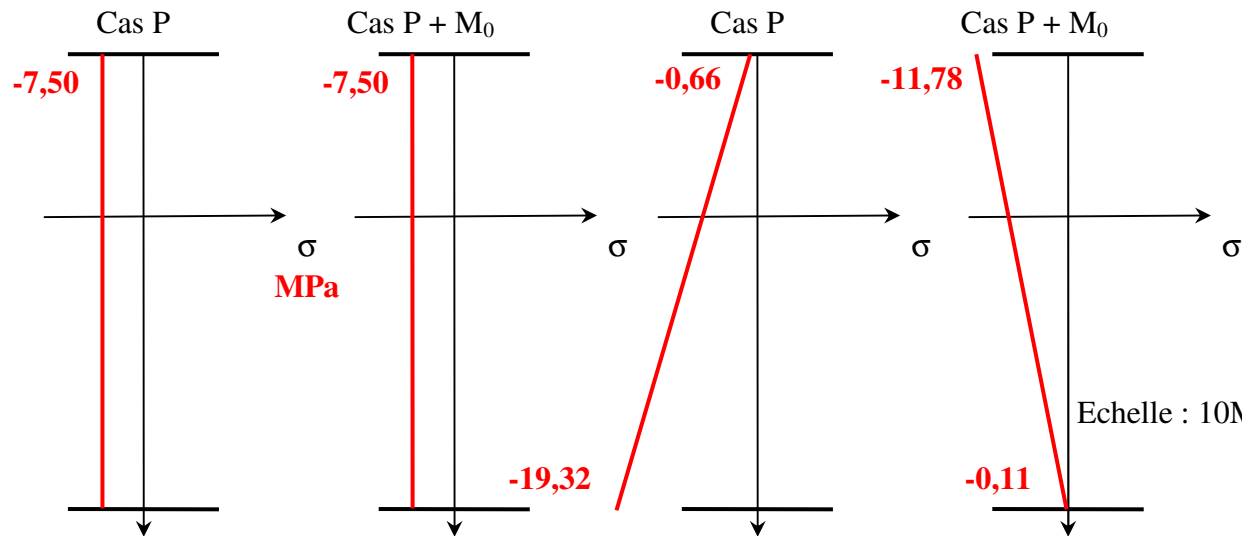
Document Réponse II

Echelle x : 1/50
y : 1/10

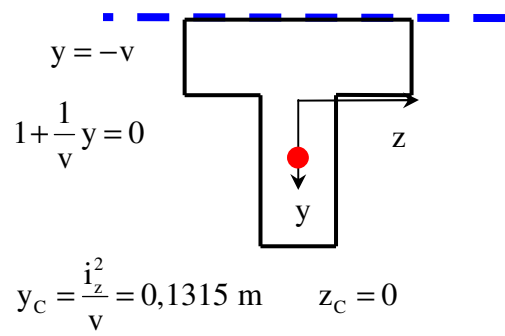


Section origine Σ_0

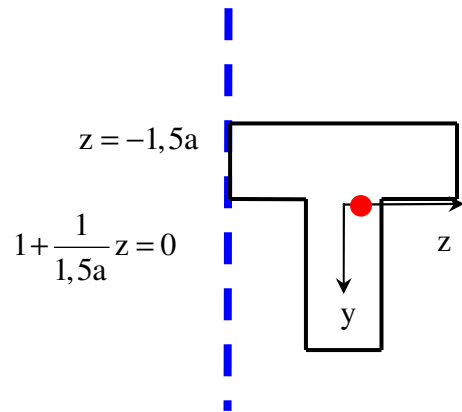
Section médiane Σ_m



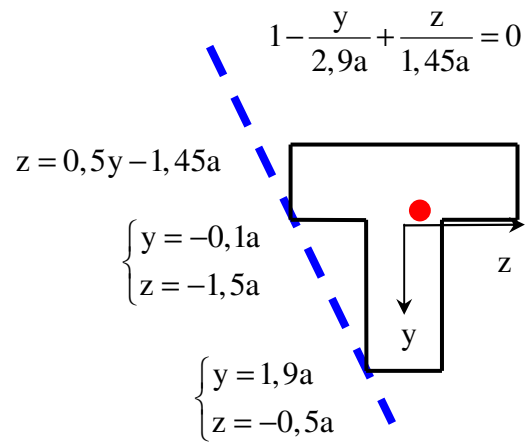
Noyau central :



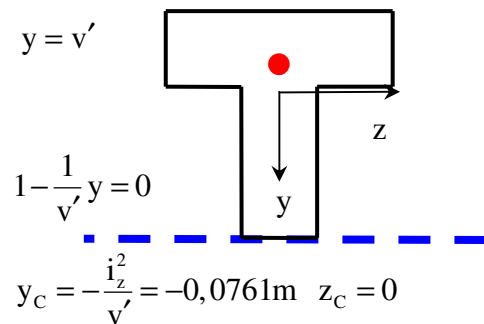
$$y_c = \frac{i_z^2}{v} = 0,1315 \text{ m} \quad z_c = 0$$



$$y_c = 0 \quad z_c = \frac{i_y^2}{1,5a} = 0,0644 \text{ m}$$



$$y_c = -\frac{i_z^2}{2,9a} = -0,0499 \text{ m} \quad z_c = \frac{i_y^2}{1,45a} = 0,0667 \text{ m}$$



$$y_c = -\frac{i_z^2}{v'} = -0,0761 \text{ m} \quad z_c = 0$$

Fuseau de passage de compression : (non nécessaire)

$$-\sigma_L \leq \sigma_{\text{inf}}(P) \qquad -\sigma_L \leq -\frac{P}{A} + \frac{-Pe(x)}{I_z} v'$$

$$-\sigma_L \leq \sigma_{\text{sup}}(M_0 + P) \qquad -\sigma_L \leq -\frac{P}{A} - \frac{M_0(x) - Pe(x)}{I_z} v$$

$$e(x) \leq \frac{\sigma_L I_z}{Pv'} - \frac{I_z}{v'A} = e_{\text{max}}$$

$$e(x) \geq \frac{M_0(x)}{P} + \frac{I_z}{vA} - \frac{\sigma_L I_z}{Pv} = e_{\text{min}}$$

$$\text{en } x = \frac{0,85L}{2} \quad e(x) \geq \frac{M_0(x)}{P} - \frac{I_z}{v'A} = e_{\text{min}}$$

Ouverture du fuseau :

$$\frac{M_0(x)}{P} + \frac{I_z}{vA} - \frac{\sigma_L I_z}{Pv} \leq \frac{\sigma_L I_z}{Pv'} - \frac{I_z}{v'A} \quad P \leq \sigma_L A - \frac{M_0(x)A}{I_z} \frac{vv'}{v+v'}$$

Condition sous critique :

$$P \geq \frac{vv'A}{I_z} \frac{M_0(x)}{v+v'} = P_I$$

Fuseau dans la section moins enrobage :

$$P \geq \frac{M_0(x)}{v' - d' + \frac{I_z}{v'A}} = P_{II}$$