

1BG6

Transformations finies d'une poutre viscoélastique en traction simple

Projet de modélisation



DAMBRE DAMIEN, RÉMÉSY ROMAIN, GREJON THOMAS

23/05/2008

Sommaire

I. Préparation à la résolution du problème

1. Présentation du problème

2. Hypothèses de résolution

3. Description de l'effort

4. Propriété de la transformation et conséquences

5. Calcul des dérivées objectives :

- a. Dérivée de Jaumann
- b. Dérivée de Truesdell
- c. Dérivée de Cotter-Rivling

II. Résolution du problème

1. Comportement hypoélastique :

$$\eta = +\infty$$

- a. Dérivée de Jaumann
- b. Dérivée de Truesdell
- c. Dérivée de Cotter-Rivling

III. Comportement viscoélastique :

$$\eta \in]0, +\infty[$$

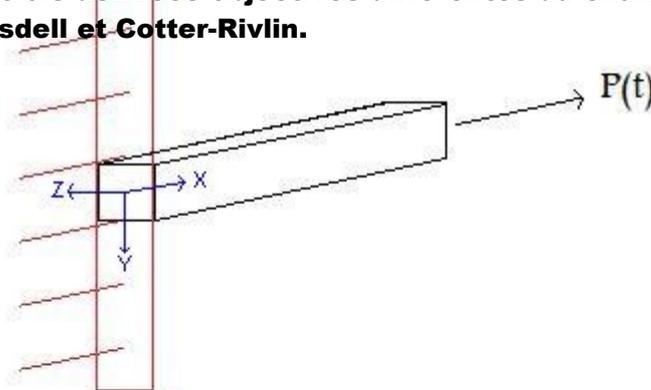
- a. Dérivée de Jaumann
- b. Dérivée de Truesdell
- c. Dérivée de Cotter-Rivlin

I. Préparation à la résolution du problème

1. Présentation du problème

On considère une poutre viscoélastique, de module d'élasticité $E > 0$, de coefficient de Poisson $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$ et de viscosité $\eta \in \{\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}\}$. Elle possède une longueur $l(t)$ et une section rectangulaire $s(t)$. Cette poutre est en liaison encastrement sur sa section gauche et on la soumet à un effort de traction simple selon la direction horizontale de sa fibre moyenne.

On se propose d'étudier sa déformée longitudinale, i.e. de trouver $l(t)$, en fonction de la force appliquée puis, à l'inverse, de trouver la force soumise à la poutre connaissant la déformée longitudinale selon deux comportements de la poutre : hypoélastique ($\eta = +\infty$) et viscoélastique ($\eta \in]0, +\infty[$). Pour chaque cas, on traitera le problème pour trois dérivées objectives différentes du champ des contraintes : Jaumann, Truesdell et Cotter-Rivlin.



2. Hypothèses de résolution

Les transformations sont finies et quasi-statiques.

Les actions mécaniques à distance sont nulles.

Le matériau déformable constituant la poutre est homogène et son comportement est régi par la relation :

$$D = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\sigma}^{obj}) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}^{obj} - \frac{\nu}{\eta} \text{tr}(\sigma) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{\eta} \sigma$$

3. Description de l'effort

On désigne par l_0 la longueur initiale de la poutre et par s_0 l'aire initiale des sections puis respectivement $l(t)$ la longueur à l'instant t et $s(t)$ l'aire à l'instant t.

L'effort de traction appliqué à l'instant t à $x=l(t)$ se note P(t). On considère que P(0)=0 car on n'applique aucune force à t=0. On suppose la transformation linéaire car l'effort se répartit sur toutes sections droites. De plus, $s(0)=s_0$ car l'encastrement empêche le déplacement à la base.

On peut écrire : $P(t) = \sigma_{xx}(t) \cdot s(t) \rightarrow \sigma_{xx}(t) = \frac{P(t)}{s(t)}$; et étant donné que P(t) est la seule force

appliquée à la poutre (et donc que toutes les autres faces de la poutre sont libres), le champ des contraintes s'écrit comme suit :

Alors : $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; de ce fait, on aura $\sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)}$

4. Propriété de la transformation et conséquences

La transformation est considérée comme linéaire, on peut donc identifier le tenseur des transformations linéaires tangentes F à sa transformation linéaire tangente.

On choisit l'instant t=0 comme référence, (X, Y, Z) représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée P et (x, y, z) les coordonnées de cette même particule à l'instant t.

Le tenseur F est diagonal car la rotation est impossible autour de la fibre moyenne étant donné que la répartition de la force sur les sections est homogène.

Les coordonnées du tenseur F ne dépendent donc que du temps du fait du comportement linéaire de la poutre.

Et enfin la poutre est droite, donc y et z sont indépendants d'Y et de Z.

De plus comme P(t) est uniforme sur la section droite, on a x indépendant d'Y et de Z.

La section étant constante, on a donc y et z indépendants de X.

La transformation est donc de la forme :

$$x = f_x(t) \cdot X$$

$$y = f_y(t) \cdot Y$$

$$z = f_z(t) \cdot Z$$

où f est la fonction définie précédemment et fy et fz deux autres fonctions dérivables, croissantes et telles que $f_y(0)=1$ et $f_z(0)=1$ qui représentent la contraction sur y et z.

On recherche évidemment une transformation sous la même forme :

$$x = f_x(t) \cdot X$$

$$y = f_y(t) \cdot Y$$

$$z = f_z(t).Z$$

De plus, du fait de la géométrie de la poutre qui laisse penser à une transformation identique selon y et z, on a : $f_z = f_y$; D'où :

$$x = f_x(t).X$$

$$y = f_y(t).Y$$

$$z = f_y(t).Z$$

De plus, on remarque que : $s(t) = y_0 f_y(t).z_0 f_y(t) = s_0 f_y^2(t)$

La transformation étant quasi-statique, on a F inversible et : $f_x(t) \neq 0$ et $f_y(t) \neq 0$.
On a alors :

$$\vec{v} \rightarrow (x, y, z, t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x'(t).X \\ f_y'(t).Y \\ f_y'(t).Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_x'(t).x}{f_x(t)} \\ \frac{f_y'(t).y}{f_y(t)} \\ \frac{f_y'(t).z}{f_y(t)} \end{bmatrix} \text{ que l'on a besoin pour le calcul de D et W, donc}$$

de G.

$$G = \text{grad}_x \vec{v} \rightarrow (x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} \end{bmatrix}$$

$$D = \text{sym}(G) = G$$

$$W = \text{antisym}(G) = [0]$$

5. Calcul des dérivées objectives :

a. Dérivée de Jaumann

$$\check{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma.W - W.\sigma = \dot{\sigma} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Dérivée de Truesdell

$$\check{\sigma} = \dot{\sigma} - G.\sigma - \sigma.^tG + \sigma.\text{div}_x \left(\vec{v} \rightarrow (x, y, z, t) \right) = \dot{\sigma} - 2G.\sigma + \sigma.\text{div}_x \left(\vec{v} \rightarrow (x, y, z, t) \right)$$

$$\text{div}_x \left(\vec{v} \rightarrow (x, y, z, t) \right) = \text{tr}G = \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} + 2 \frac{f_y'(t)}{f_y(t)}$$

$$\check{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} - 2 \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \frac{P(t)}{s(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \left(\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} + 2 \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f_x'(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} + 2 \frac{P(t) f_y'(t)}{s(t) f_y(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Dérivée de Cotter-Rivling

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma} + G \cdot \sigma + \sigma \cdot {}^tG = \dot{\sigma} + 2G \cdot \sigma = \begin{bmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \frac{f_x'(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II. Résolution du problème

1. Comportement hypoélastique :

$$\eta = +\infty$$

Du fait que : $\eta = +\infty$, on peut simplifier directement la relation de D :

$$D = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\sigma}^{obj}) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}^{obj}$$

a. Dérivée de Jaumann

$$\begin{bmatrix} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} \end{bmatrix} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \begin{bmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta + \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} &= \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{E \cdot s^2(t)} & \rightarrow & \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{E \cdot s^2(t)} \\ \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} &= -\frac{\nu P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{E \cdot s^2(t)} & & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\nu \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \end{aligned}$$

On voit immédiatement qu'il faut distinguer deux cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad v = 0 \rightarrow \frac{f'_y(t)}{f_y(t)} = 1 \rightarrow f_y(t) = K_y e^t = e^t \text{ et } f_x(t) = K_x e^{\frac{P(t)}{E \cdot s(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s_0 \cdot f_y^2(t)}} \text{ d'après C.I.} \\ 2. \quad v \neq 0 \rightarrow f_y(t) = f_x(t)^{-v} \text{ et } f_x(t) = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s_0 \cdot f_y^{2v}(t)}} \end{array} \right.$$

✓ Pilotage en force

Cela signifie que l'on connaît la force de traction que l'on applique à la poutre et qu'on cherche $f(t)$ en fonction de cette force.

En considérant que $v \neq 0$, on a : $f_x(t) = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s_0 \cdot f_y^{2v}(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s_0 \cdot f_x^{2v}(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s_0}}$

Ici, l'astuce est de réarranger l'équation :

$$\frac{P(t)}{E \cdot s_0} = \ln(f_x(t)) \cdot e^{-2v \ln(f_x(t))}$$

puis d'intégrer par rapport à v , ce qui donne :

$$\frac{P(t)}{E \cdot s_0} \cdot v + K_v = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2v \ln(f_x(t))} \rightarrow f_x(t) = (K_v + -2v \frac{P(t)}{E \cdot s_0})^{-\frac{1}{2v}} \text{ d'après les C.I.}$$

✓ Pilotage en déplacement

Cela signifie que l'on connaît le déplacement longitudinal $f_x(t)$ que subit la poutre et qu'on cherche $P(t)$ en fonction de ce déplacement.

En considérant que $v \neq 0$, on a : $f_x(t) = e^{\frac{P(t)}{E \cdot s_0 \cdot f_y^{2v}(t)}} \rightarrow P(t) = \frac{E \cdot s_0}{f_x^{2v}(t)} \ln(f_x(t))$

b. Dérivée de Truesdell

$$* \frac{f'_y(t)}{f_y(t)} = -\frac{v}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'_x(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} + 2 \frac{P(t) f'_y(t)}{s(t) f_y(t)} \right)$$

$$* \frac{f'_x(t)}{f_x(t)} = -\frac{v}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'_x(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} + 2 \frac{P(t) f'_y(t)}{s(t) f_y(t)} \right) + \frac{1+v}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'_x(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} + 2 \frac{P(t) f'_y(t)}{s(t) f_y(t)} \right)$$

$$\frac{f'_x(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'_x(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} + 2 \frac{P(t) f'_y(t)}{s(t) f_y(t)} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'_x(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} - 2v \frac{P(t) f'_x(t)}{s(t) f_x(t)} \right)$$

du fait que $\frac{f'_y(t)}{f_y(t)} = -v \frac{f'_x(t)}{f_x(t)}$ trouvé grâce à l'équation précédente.

En utilisant le fait que $\sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)}$ et que $\sigma'(t) = \frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)}$, on a finalement :

$$\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E} \left(\sigma'(t) - \sigma(t) \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} (1 + 2\nu) \right) \text{ et } f_x(t) = K \cdot f_y(t)^{-\nu} = f_y(t)^{-\nu} \text{ d'après les C.I.}$$

✓ *Pilotage en force*

Cela signifie que l'on connaît la force de traction que l'on applique à la poutre et qu'on cherche $f(t)$ en fonction de cette force.

✓ *pilotage en déplacement*

Cela signifie que l'on connaît le déplacement longitudinal que subit la poutre et qu'on cherche $P(t)$ en fonction de ce déplacement $f_x(t)$:

On a vu que :
$$\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E} \left(\sigma'(t) - \sigma(t) \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} (1 + 2\nu) \right)$$

... On voit directement une solution de cette équation : $\sigma_1(t) = -\frac{E}{1+2\nu}$

... On résout désormais l'équation homogène : $\sigma_0'(t) - \sigma_0(t) \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} (1 + 2\nu) = 0 \rightarrow \frac{\sigma_0'(t)}{\sigma_0(t)} = \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} (1 + 2\nu)$

Ce qui nous donne : $\sigma_0(t) = K \cdot f_x(t)^{1+2\nu}$

... On peut donc déterminer la solution complète : $\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_0(t) = -\frac{E}{1+2\nu} + K \cdot f_x(t)^{1+2\nu}$

$\sigma(t) = \frac{E}{1+2\nu} (f_x(t)^{1+2\nu} - 1)$ d'après les C.I.

$$P(t) = \sigma(t) \cdot s(t) = \sigma(t) \cdot s_0 f_y^2(t) = \sigma(t) s_0 f_x(t)^{-2\nu} = \frac{E}{1+2\nu} (f_x(t) - f_x(t)^{-2\nu})$$

c. Dérivée de Cotter-Rivling

$$* \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\frac{\nu}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \frac{P(t)}{s(t)} \right)$$

$$* \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = -\frac{\nu}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \frac{f_x'(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \frac{f_x'(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} \right)$$

$$\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E} \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \frac{f_x'(t) P(t)}{f_x(t) s(t)} \right)$$

En utilisant le fait que $\sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)}$ et que $\sigma'(t) = \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)}$, on a finalement :

$$\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E} \left(\sigma'(t) + 2\sigma(t) \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right) \text{ et } f_x(t) = K \cdot f_y(t)^{-\nu} = f_y(t)^{-\nu} \text{ d'après les C.I.}$$

✓ Essai piloté en force

Cela signifie que l'on connaît la force de traction que l'on applique à la poutre et qu'on cherche $f(t)$ en fonction de cette force.

✓ Essai piloté en déplacement

Cela signifie que l'on connaît le déplacement longitudinal que subit la poutre et qu'on cherche $P(t)$ en fonction de ce déplacement $f_x(t)$

$$\text{On a vu que : } \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E} \left(\sigma'(t) + 2\sigma(t) \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right)$$

... On voit directement une solution de cette équation : $\sigma_1(t) = \frac{E}{2}$

... On résout désormais l'équation homogène : $\sigma_0'(t) + 2\sigma_0(t) \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_0'(t)}{\sigma_0(t)} = -2 \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}$

Ce qui nous donne : $\sigma_0(t) = K \cdot f_x(t)^{-2}$

... On peut donc déterminer la solution complète : $\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_0(t) = \frac{E}{2} + K \cdot f_x(t)^{-2}$

$\sigma(t) = \frac{E}{2} (1 - f_x(t)^{-2})$ d'après les C.I.

$$P(t) = \sigma(t) \cdot s(t) = \sigma(t) \cdot s_0 f_y^2(t) = \sigma(t) s_0 f_x(t)^{-2\nu} = \frac{E s_0}{2} (f_x(t)^{-2\nu} - f_x(t)^{-2(1+\nu)})$$

III. Comportement viscoélastique : $\eta \in]0, +\infty[$

On retrouve l'équation : $D = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\sigma}^{obj}) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}^{obj} - \frac{\nu}{\eta} \text{tr}(\sigma) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{\eta} \sigma$

On connaît le déplacement longitudinal $f_x(t)$ que subit la poutre et on cherche P(t) de la forme: $P_{i+1} = P_i + h \cdot L(P_i, t_i)$

On observera la convergence de cette solution si $f_x(t)$ est différentiable et lipchitzienne par sa première composante.

On aura alors la certitude que la solution approchée tend vers la solution exacte car $h \rightarrow 0$

On calcule maintenant cette approximation pour chacune des dérivées objectives...

a. Dérivée de Jaumann

On part de :

$$\begin{cases} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{-\nu(P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t))}{E \cdot s^2(t)} + \frac{(1+\nu) \cdot (P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t))}{E \cdot s^2(t)} + \frac{P(t)}{\eta \cdot f_y(t)} \\ \frac{f_y'(t)}{s(t)} = \frac{-\nu(P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t))}{E \cdot s^2(t)} - \frac{\nu \cdot P(t)}{\eta \cdot s(t)} \end{cases}$$

Ce qui se simplifie en

$$\begin{cases} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{(P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t))}{E \cdot s^2(t)} + \frac{P(t)}{\eta \cdot s(t)} \\ \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\nu \cdot \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \end{cases}$$

En remplaçant s(t) dans l'équation on trouve : $\frac{E \cdot s_0 \cdot f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2\nu}} = P'(t) + P(t) \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2 \cdot \nu \cdot \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right)$

D'où $P'(t) = -P(t) \cdot \left(\frac{E}{\eta} + \frac{2 \cdot \nu \cdot f_x'(t)}{f_x(t)} \right) + \frac{E \cdot s_0 \cdot f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2\nu}}$

Pour rejoindre le schéma d'Euler on pose $L(P, t) = -P \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2\nu \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right) + \frac{E \cdot s_0 \cdot f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2\nu}}$

Par conséquent on obtient le schéma suivant : $P_{i+1} = P_i + h \cdot \left(-P_i \cdot \left(\frac{E}{\eta} + \frac{2 \cdot \nu \cdot f_x'(t)}{(1+i \cdot h) \cdot f_x(t)} \right) + \frac{E \cdot s_0 \cdot f_x'(t)}{(1+i \cdot h)^{1+2\nu}} \right)$

b. Dérivée de Truesdell

$$\left| \begin{array}{l} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{(P'(t)s(t) - P(t)s'(t))}{E s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \left(2 \cdot \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right) + \frac{P(t)}{\eta s(t)} \\ \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\nu \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \end{array} \right|$$

On par de :

$$\text{En remplaçant } s(t) \text{ dans l'équation on trouve : } \frac{E s_0 f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2\nu}} = P'(t) + P(t) \left(\frac{E}{\eta} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right)$$

$$\text{D'où } P'(t) = -P(t) \left(\frac{E}{\eta} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right) E s_0 \frac{f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2\nu}} +$$

$$\text{Par conséquent on obtient le schéma suivant : } P_{i+1} = P_i + h \cdot \left(-P_i \cdot \left(\frac{E}{\eta} - \frac{1}{(1+i \cdot h)} + \frac{E s_0}{(1+i \cdot h)^{1+2\nu}} \right) \right)$$

c. Dérivée de Cotter-Rivlin

$$\left| \begin{array}{l} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{(P'(t)s(t) - P(t)s'(t))}{E s^2(t)} + 2 \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} + \frac{P(t)}{\eta s(t)} \\ \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\nu \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \end{array} \right|$$

On part de :

$$\text{En remplaçant } s(t) \text{ dans l'équation on trouve : } E s_0 \frac{f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2\nu}} = P'(t) + P(t) \left(\frac{E}{\eta} + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \right)$$

$$\text{Par conséquent on obtient le schéma suivant : } P_{i+1} = P_i + h \cdot \left(-P_i \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{1}{(1+i \cdot h)} + \frac{E s_0}{(1+i \cdot h)^{1+2\nu}} \right) \right)$$