Formulaire Mécanique des Milieux Continus

Jm Roussel

Cinématique des milieux continus

Transformation linéaire tangente :

$$\boxed{\underline{\underline{F}} = grad_{\vec{X}}(\vec{x}(\vec{X},t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{d\vec{x} = \underline{\underline{F}}.d\vec{X}}$$

Jacobien de la transformation :

$$\boxed{J = det(F)} \qquad \boxed{dv = J.dV}$$

Vitesse lagrangienne : *convertible en coordonnées euleriennes*

$$\boxed{\vec{v}(\vec{X},t) = \frac{d\vec{u}(\vec{X},t)}{dt}}$$

Trajectoire :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x},t) \\ \vec{x}(\vec{X},t=0) = \vec{X} \end{cases}}$$

Lignes de courant :

$$\boxed{\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}} \text{ ou } \boxed{\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}}$$

Lignes d'émission du point M à l'instant t :

- Fixer $0 < \tau < t$
- Calculer $\vec{X}_\tau(\vec{x}_M,\tau)$ *(Particule qui se trouve en M à l'instant τ)*
- Calculer $\vec{x}_\tau(\vec{X}_\tau,t)$ *(position de la particule qui se trouve en $\vec{X}_\tau$ à l'instant t)*
- Éliminer τ pour obtenir une équation cartésienne à l'instant t.

Accélération :

- lagrangienne $\boxed{\vec{\gamma} = \dfrac{\partial \vec{v}(\vec{X},t)}{\partial t}}$
- eulerienne $\boxed{\vec{\gamma} = \dfrac{\partial \vec{v}(\vec{x},t)}{\partial t} + \underline{\underline{G}}.\vec{v} \textit{ avec } \underline{\underline{G}} = grad_{\vec{x}}(\vec{v})}$

Équation de conservation de la masse :

- du point de vue eulerien : $\boxed{\dfrac{d\rho}{dt} + \rho.div_{\vec{x}}(\vec{v}) = 0}$
- du point de vue lagrangien : $\boxed{\rho(\vec{X},0) = \rho(\vec{X},t).J(\vec{X},t)}$

Déformation des milieux continus

Tenseur de Cauchy à droite :

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}}$$

Tenseur de Green-Lagrange :

$$\boxed{\underline{\underline{L}} = \frac{\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}}{2}}$$

Technique de décomposition de $\underline{\underline{F}}$ et calcul du tenseur des déformations avant rotation $\underline{\underline{U}}$:

[1] Calculer $\underline{\underline{C}}$

[2] Diagonaliser $\underline{\underline{C}}$, on a alors $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{P}}.\underline{\underline{C_D}}.\underline{\underline{P^{-1}}}$ avec $\underline{\underline{C_D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

[3] Calculer $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{P}}.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}.\underline{\underline{P^{-1}}}$

Dilatation lagrangienne :

$$\boxed{\epsilon_{NN} = \frac{dx - dX}{dX}} \qquad \boxed{\epsilon_{NN} = \sqrt{\vec{N}.\underline{\underline{C}}.\vec{N}} - 1}$$

Distorsion lagrangienne :

$$\boxed{\gamma_{NT} = \frac{\pi}{2} - \theta_{nt}} \qquad \boxed{sin(\gamma_{NT}) = \frac{\vec{N}.2\underline{\underline{L}}.\vec{T}}{\sqrt{\vec{N}.\underline{\underline{C}}.\vec{N}}.\sqrt{\vec{T}.\underline{\underline{C}}.\vec{T}}}}$$

Variation de volume :

$$\boxed{\theta_v = \frac{dv - dV}{dV}}$$

Tenseur taux de déformation :

$$\boxed{\underline{\underline{D}} = \frac{{}^t\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{G}}}{2}}$$

Tenseur taux de rotation :

$$\boxed{\underline{\underline{R}} = \frac{\underline{\underline{G}} - {}^t\underline{\underline{G}}}{2}}$$

Tourbillon des vitesses :

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}.rot_x(\vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}}$$

Cas des transformations infinitésimales

Tenseurs des petites déformations ϵ et des petites rotations ω :

$$\boxed{\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{{}^t\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}}{2}} \qquad \boxed{\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \qquad \boxed{\underline{\underline{\omega}} = \frac{\underline{\underline{H}} - {}^t\underline{\underline{H}}}{2}}$$

Autres tenseurs en petites déformations :

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\epsilon}}} \qquad \boxed{\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\omega}}} \qquad \boxed{\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{V}}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{\epsilon}}} \qquad \boxed{\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\omega}}}$$

Élongation et distorsion :

$$\boxed{\epsilon_{nn} = \vec{n}.\underline{\underline{\epsilon}}.\vec{n}} \qquad \boxed{\gamma_{nt} = 2.\vec{n}.\underline{\underline{\epsilon}}.\vec{t}}$$

Jacobien :

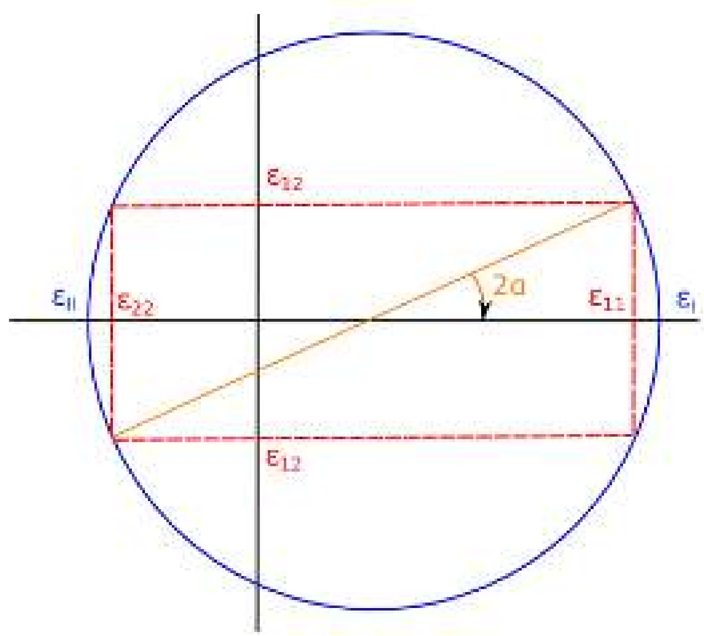
$$\boxed{J = 1 + Tr(\underline{\underline{H}}) = 1 + div(\vec{u})}$$

Unique décomposition de $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\boxed{\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{e}} + \frac{\underline{\underline{\delta}}}{3}\theta \ avec\ \theta = Tr(\underline{\underline{\epsilon}})}$$

Cercle de Mohr des déformations

Pour $\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$



Remarque : une rotation réelle d'un angle α est représentée par une rotation de valeur -2α sur le cercle de Mohr.

Contraintes

Une contrainte est une pression généralisée. Elle peut cependant ne pas être orthogonale à la facette sur laquelle elle s'applique.

Définitions :

$$\boxed{\vec{\sigma_n} = \lim_{dS \to 0} \frac{d\vec{f_n}}{dS}} \qquad \boxed{\vec{\sigma_n} = \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}}$$

Convention M.M.C. :

$$\boxed{\vec{\sigma_n} = \sigma_{nn}.\vec{n} + \vec{\tau_n}}$$

si $\sigma_{nn} > 0$ alors traction
si $\sigma_{nn} < 0$ alors compression

Propriétés du tenseur des contraintes :

- $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$
- $\underline{\underline{\sigma}}$ est diagonalisable donc il existe $\sigma_D = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$

Équation indéfinie du mouvement :

$$\boxed{\vec{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho.\vec{f_v} = \rho.\vec{\gamma}}$$ avec $\vec{f_v}$ la force volumique du matériau

Contrainte moyenne :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \cdot \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{s}}}$$

avec la contrainte moyenne $\sigma_m = \frac{tr(\underline{\underline{\sigma}})}{3}$ et la partie déviatorique du déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}$

Rhéologie

Élasticité Linéaire Isotrope :

$$\boxed{\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \cdot tr(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{\delta}}} \qquad (1)$$

$$\boxed{tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{E}{1-2\nu} \cdot tr(\underline{\underline{\epsilon}})}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \cdot \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda tr(\underline{\underline{\epsilon}}) \cdot \delta}$$

Relations entre coefficients :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E.\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad \begin{cases} E = \frac{3\lambda+2\mu}{\mu+\lambda}\mu \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{cases}$$

Cas de l'incompressibilité :

Utiliser la loi de comportement (1). $\nu = \frac{1}{2}$

Thermoélasticité Linéaire Isotrope :

$$\boxed{\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{th} + \underline{\underline{\epsilon}}^{méca}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\epsilon}}^{méca} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \cdot tr(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{\delta}}} \quad \boxed{\underline{\underline{\epsilon}}^{th} = \beta \Delta T \underline{\underline{\delta}}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \Big(\lambda \cdot tr(\underline{\underline{\epsilon}}) - (3\lambda + 2\mu)\beta\Delta T\Big)\underline{\underline{\delta}} + 2\mu \cdot \underline{\underline{\epsilon}}}$$

Fluide parfait :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = -p.\underline{\underline{\delta}}}$$

Fluides visqueux newtoniens :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \Big(-p + \xi \cdot tr(\underline{\underline{D}})\Big)\underline{\underline{\delta}} + 2\eta \cdot \underline{\underline{D}}}$$

ξ viscosité dynamique en volume
η viscosité dynamique en cisaillement

Pour les fluides incompressibles : $\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = -p \cdot \underline{\underline{\delta}} + 2\eta \cdot \underline{\underline{D}}}$

Critère de Tresca - critère de cisaillement maximum :

L'état limite élastique est atteint en un point P_t lorsque la contrainte tangentielle τ_n sur l'une des facettes passant par P_t atteint une valeur critique τ_0.

- Domaine élastique : $\forall \vec{n}, |\tau_n| < \tau_0$
- Domaine plastique : $\exists \vec{n} / |\tau_n| = \tau_0$

$$\boxed{max\{|\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{III} - \sigma_{II}|\} \leq 2\tau_0}$$

pour un essai en traction simple ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ et $\sigma_3 \leq 0$) : $\sigma_0 = 2\tau_0$

Critère de Von Misès :

$$\boxed{\sqrt{J_2} \leq C_M}$$

$$J_2 = tr(\underline{\underline{s}}^2)\ avec\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \cdot \delta$$

En traction simple : $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} C_m}$

Critère de Mohr-Coulomb - critère dépendant de la contrainte moyenne

$$\boxed{|\tau_n| \leq C - \sigma_{nn} \cdot tan(\phi)}$$

C cohésion du matériau et ϕ l'angle de frottement

$C = 0$ matériau pulvérulent (ex : sable sec)

$C \neq 0$ matériau cohérent

Théorèmes généraux

Théorème d'Euler :
Soient Ω un volume de contrôle et Γ une surface de contrôle

$$\boxed{\oiint_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} ds + \iiint_{\Omega} \rho \vec{b} d\tau = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\tau + \oiint_{\Gamma} \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \rho \vec{b} \vec{v} d\tau + \oiint_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \vec{v} ds = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 d\tau + \iiint_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\vec{v}) d\tau}$$

Fluide au repos - équation d'équilibre :

$$\boxed{gr\vec{a}d(P) = \rho \cdot \vec{b}}$$

Fluide parfait en mouvement :

$$\boxed{gr\vec{a}d(P) = \rho(\vec{b} - \vec{\gamma})}$$

Théorème de Bernoulli :
Pour un fluide parfait, soumis aux seules forces de pression et de pesanteur, en écoulement stationnaire irrotationnel, le long d'une ligne de courant.

$$\boxed{\int \frac{dP}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = K}$$

Equation de Navier-Stockes :

$$\boxed{-\,gr\vec{a}d(P) + (\xi + \eta) \cdot gr\vec{a}d(div(\vec{v})) + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{b} = \rho \vec{\gamma}}$$

Equation de Lamé-Navier :

$$\boxed{(\lambda + \mu) \cdot gr\vec{a}d(div(\vec{n})) + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{b} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{X}, t)}$$

$$\boxed{(\lambda + 2\mu) \cdot gr\vec{a}d(div(\vec{u})) + \mu r\vec{o}t(r\vec{o}t(\vec{u})) + \rho \vec{b} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{X}, t)}$$

Energie de déformation par unité de volume :

$$\boxed{w = \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{2}}$$

Energie de déformation

$$\boxed{W_{\text{déf}} = \int_{\Omega} \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{2} d\tau}$$

Cas des solides élastiques linéaires isotropes :

$$\boxed{W_{\text{déf}} = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\lambda \cdot \theta^2 + (2\mu\epsilon) : \epsilon) d\tau}$$

Théorème de l'énergie potentielle :

$$\boxed{W_{\text{déf}} = \int_{\Omega} \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}}{2} d\tau}$$