

Extensométrie par jauges électriques : poutre à profil triangulaire

Bildstein Audrey, Dufournet Marylou, Roussel Jean-Marie

L'objectif de ce TP est de déterminer les déformations appliquées à un système de façon expérimentale, à l'aide de jauge extensométriques, et de confronter ces données aux résultats théoriques.

I. Étude expérimentale

Résultats expérimentaux

Les jauges d'extensométrie nous donnent un ϵ_{moy} qu'il faut multiplier par le facteur de chaque jauge GF pour obtenir $\epsilon_{réel}$:

$$\epsilon_{réel} = \epsilon_{moy} \cdot GF$$

On obtient alors les résultats suivants :

charge	jauge 1	jauge 2	jauge 3	jauge 4	jauge 5	jauge 6	jauge 7	jauge 8	jauge 9	jauge 10	jauge 11	jauge 12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	191	36	-95	-109	-91	-9	-398	-161	297	55	199	-415
10	389	111	-190	-298	-144	20	-732	-149	624	173	434	-810
15	638	208	-198	-424	-185	60	-1035	-303	969	288	659	-847
20	837	264	-250	-552	-239	89	-1445	-510	1309	389	696	-1069
15	219	222	-211	-463	-197	63	-1171	-424	1039	304	710	-992
10	424	115	-162	-311	-147	15	-772	-293	653	192	449	-639
5	182	42	-91	-172	-83	-8	-392	-164	295	66	206	-395
0	-32	-37	-34	-44	-38	-54	-42	-45	-38	-41	-17	-173

Le graphique représentant les déformations en fonction de la charge est fourni en annexe.

Dépouillement pour la rosette à 45°

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \left(\frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2}; 0 \right) \\ R = \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_B)^2}{2}} \\ \phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\epsilon_B - \Omega}{\epsilon_A - \Omega} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = (490; 0) \\ R = 906 \\ \phi = -0,6 \text{ degrés} \end{array} \right.$$

Dépouillement pour la rosette à 120°

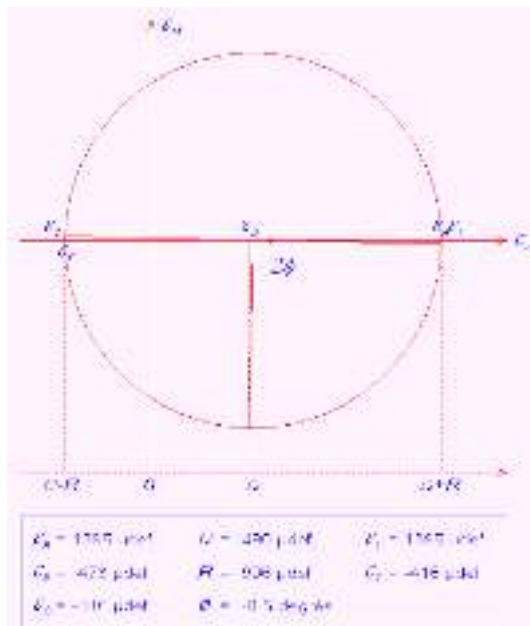
On obtient :

$$\begin{cases} \Omega = \left(\frac{\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C}{3}; 0 \right) \\ R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_A)^2}{3}} \\ \phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\epsilon_C - \epsilon_B}{\sqrt{3}(\epsilon_A - \Omega)} \right) \end{cases}$$

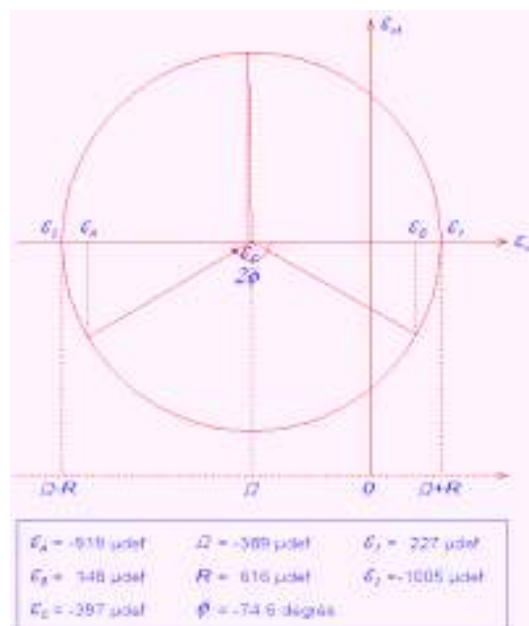
$$\begin{cases} \Omega = (-390; 0) \\ R = 616 \\ \phi = -75 \text{ degrés} \end{cases}$$

Vérification par le logiciel ROSETTE

Le logiciel Rosette permet, à partir des résultats obtenus, de tracer les cercles de Mohr associés aux rosettes de 45° et de 120°.



Rosette à 45°



Rosette à 120°

Ces résultats concordent avec ceux que nous avons obtenus par le calcul.

II. Étude théorique

1. Les conditions aux limites en contrainte sont :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_{e_{\theta}} = \vec{0} \\ \vec{\sigma}_{-e_{\theta}} = \vec{0} \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \sigma \cdot \vec{e}_\theta = \vec{0} \\ \sigma \cdot (-\vec{e}_\theta) = \vec{0} \end{cases}$$

Donc les conditions limites en contrainte sont bien vérifiées.

2. Les équations indéfinies de l'équilibre s'écrivent :

$$\text{div}(\vec{\sigma}) + \rho \vec{b} = \rho \vec{\gamma}$$

En coordonnées cylindriques, la première composante donne :

$$\partial_r \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \sigma_{rr} = 0$$

On identifie

$$\partial_r (r \sigma_{rr}) = 0$$

Enfin, comme σ_{rr} ne dépend que de r et de θ :

$$r \sigma_{rr} = f(\theta)$$

D'où l'expression :

$$\sigma_{rr} = \frac{f(\theta)}{r}$$

3. La fonction *sinus* est impaire donc f est impaire.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\vec{P} = \int \int \sigma_{rr} \vec{d}s$$

En projection :

$$P = \int_{-\alpha}^{\alpha} C \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{r} ds$$

Or ici $ds = er d\theta$ et \sin^2 est une fonction paire. L'équation devient :

$$P = 2 \cdot C \cdot e \int_0^{\alpha} \sin^2(\theta) d\theta$$

$$P = 2 \cdot C \cdot e \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{2} \right]_0^{\alpha}$$

Finalement :

$$C = \frac{P}{e(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha))}$$

Les erreurs relatives restent malgré tout élevées pour une grande majorité des données obtenues.

4. La loi de comportement des matériaux en élasticité linéaire isotrope donne :

$$\epsilon = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma - \frac{\nu}{E} \cdot \text{tr}(\sigma) \cdot \delta$$

La distance entre la ligne d'action de la charge appliquée à la structure et l'axe de rotation étant égale au dixième de la distance entre ce même axe et le crochet de suspension du plateau de chargement :

$$P = 10 \cdot W$$

On a donc :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{10W \cdot \sin(\theta)}{e(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) \cdot rE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-10\nu \cdot W \cdot \sin(\theta)}{e(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) \cdot rE} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-10\nu \cdot W \cdot \sin(\theta)}{e(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) \cdot rE} \end{bmatrix}$$

III. Analyse et synthèse

1. Les déformations observées sont des fonctions linéaires des charges appliquées. On en conclut que le matériau a un comportement élastique linéaire, au moins pour ce domaine de contraintes.

Les déformations 7 et 12 sont négatives car on a une compression (la longueur du fil du brin de jauge se raccourcit).

La déformation 10 est positive, cela résulte de l'effet de poisson : le matériel étant comprimé dans une direction (celle de la jauge 7) il va subir également une déformation dans la direction orthogonale à la première (celle de la jauge 10).

La déformation 9 est positive, on a une dilatation (le matériel est étiré dans cette direction)(de même pour la dilatation 11)

La déformation 8 est négative (direction orthogonale à la 9) cela s'explique par l'effet poisson ($\nu > 0$).

Les déformations 11 et 12 sont de signes opposés, ceci s'explique par le fait qu'ils soient relatifs à la même direction mais sur les deux faces opposées. La jauge 11 observe une dilatation tandis que la jauge 12 observe une compression.

Les graphes montrent que les déformations appliquées restent dans le domaine élastique du matériau. Lors de la décharge, les déformations semblent plus importantes. Les différences obtenues entre la charge et la décharge peuvent donc n'être dues qu'à un "effet mémoire" du matériau. On peut supposer que ces différences auraient été moins importantes si nous avions attendu plus longtemps entre chaque mesure.

2. La déformation ϵ_{rr} est donnée par la jauge 9 en $(r_1 + d_1, \alpha)$, par la jauge 11 en (r_2, α) , par la jauge 7 en $(r_1 - d_1, -\alpha)$ et par la jauge 12 en $(r_2, -\alpha)$.

	jauge 9	jauge 11	jauge 7	jauge 12
epsilon rr th (microdef)	917	590	-974	-590
epsilon rr exp (microdef)	991	679	-1095	-891
erreur relative (%)	8	15	12	51

La déformation ϵ_{zz} est donnée par la jauge 8 en $(r_1 - d_1, \alpha)$ et par la jauge 10 en $(r_1 + d_1, -\alpha)$. théoriquement on a la relation :

$$\epsilon_{zz} = -\epsilon_{rr} \cdot \nu$$

	jauge 8	jauge 10
epsilon zz th (microdef)	-321	303
epsilon zz exp (microdef)	-387	302
erreur relative (%)	21	0.3

3. On remarque que, d'après le tenseur des déformations ϵ :

$$\nu = \frac{\epsilon_8}{\epsilon_7} = \frac{\epsilon_{10}}{\epsilon_9}$$

On va donc faire une moyenne de ce rapport pour toutes les charges non nulles.

Charge (daN)	5	10	15	20	15	10	5	Moyenne	Ecart-type
E8/E7	0,42	0,2	0,36	0,35	0,36	0,38	0,42	0,36	0,07
E10/E9	0,19	0,28	0,3	0,3	0,29	0,28	0,22	0,27	0,04

Avec les jauges 7 et 8 on obtient $\nu = 0,36$, soit une erreur de 9 %.

Avec les jauges 9 et 10 on obtient $\nu = 0,27$, soit une erreur de 18%.

4. Le tenseur ϵ est diagonal donc les directions principales de déformation théoriques sont les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

La rosette de 3 jauges à 45° est orientée selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ . Si l'on note ϕ l'angle entre cette rosette et les directions principales de déformation, alors ϕ doit être égal à 0. Les résultats expérimentaux correspondent car on trouve $\phi = 0,5^\circ$ (voir premier cercle de Mohr).