Loi de Cauchy

C. Authier, M. Le Gallic, G. Houzelle, R. Michel, JM. Roussel

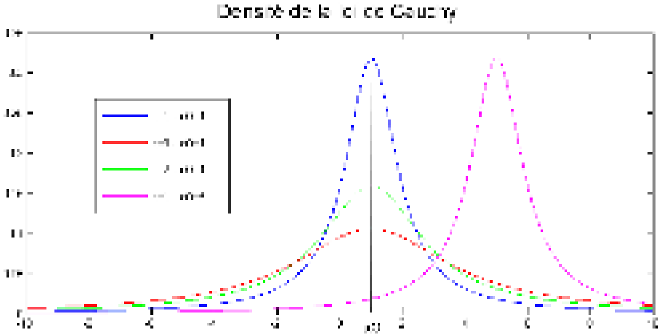
7 février 2015

Densité de la loi de Cauchy

Soit X une variable aléatoire continue. $X \hookrightarrow \mathscr{C}(x_0, a)$
$X(\Omega) = \mathbb{R}$

$$\boxed{f_X(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{(t-x_0)^2+a^2}\right)}$$

x_0 représente la médiane et a l'étalement.



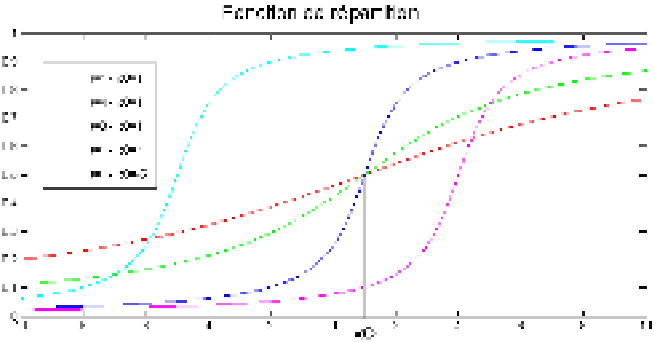
Fonction de répartition

$$\boxed{F_X(t) = \frac{1}{\pi} arctan\left(\frac{t - x_0}{a}\right) + \frac{1}{2}}$$

On a bien :

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$$



Espérance et variance de la loi de Cauchy

Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi} \left(\frac{a}{(x - x_0)^2 + a^2} \right) dx$$

Or : $\left| \frac{x}{\pi} \left(\frac{a}{(x - x_0)^2 + a^2} \right) \right| \sim \left| \frac{1}{x} \right|$ donc l'intégrale diverge.

Par conséquent l'espérance n'existe pas et a fortiori la variance non plus.

Propriétés remarquables

- Si une variable aléatoire X suit une loi de cauchy, alors $Y = 1/X$ suit la même loi.
- La loi de Cauchy ne suit pas la loi des grands nombres (la moyenne ne converge pas).

Exemple : Loi de la tangente

Soit $\theta \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$, déterminons la loi de $T = tan(\theta)$.

$T(\Omega) = \mathbb{R}$

$F_T(t) = P(T \leq t)$
$F_T(t) = P(tan(\theta) \leq t)$

Comme tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$:

$F_T(t) = P(\theta \leq arctan(t))$
$F_T(t) = F_\theta(arctan(t))$
$F_T(t) = \dfrac{arctan(t) + \pi/2}{\pi}$

En dérivant : $f_T(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$

On remarque alors que $T \hookrightarrow \mathscr{C}(1,0)$