Vendredi 06/06/08

Projet de Modélisation

DAMBRE Damien
GREJON Thomas
REMESY Romain

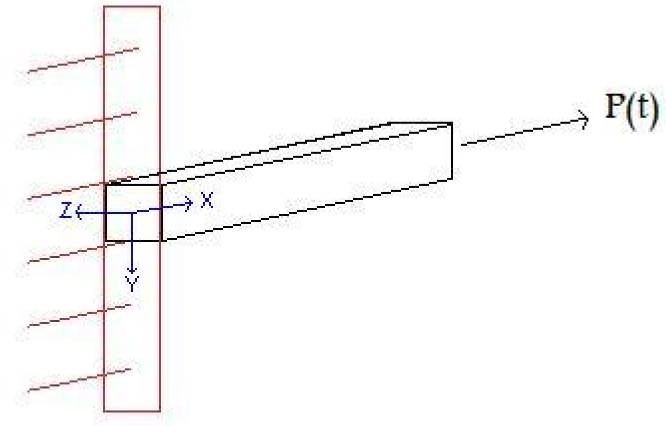
Sommaire

1. Présentation du problème

- Module d’élasticité : E>0
- Coefficient de Poisson : $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$
- Viscosité : $\eta \in \{\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}\}$
- Longueur : l(t)
- Section rectangulaire : s(t)
- Poutre en liaison encastrement sur sa section gauche
- Effort de traction simple selon la direction horizontale x

- On se propose d’étudier sa déformée longitudinale (l(t)) et de trouver la force soumise à la selon deux comportements de la poutre : hypoélastique ($\eta = +\infty$) et viscoélastique ($\eta \in]0, +\infty[$).
- Problème traité pour trois dérivées objectives différentes du champ des contraintes : Jaumann, Truesdell et Cotter-Rivlin.

poutre viscoélastique

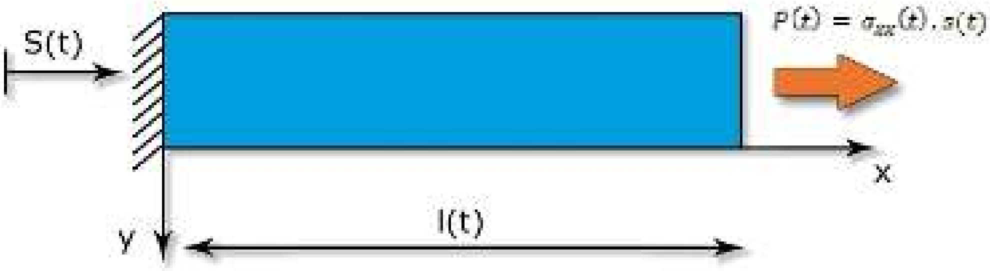


2. Hypothèses de résolution

- Les transformations sont finies et quasi-statiques.
- Les actions mécaniques à distance sont nulles.
- Le matériau déformable constituant la poutre est homogène et son comportement est régi par la relation :

$$D = -\frac{\nu}{E} tr(\dot{\sigma}^{obj}).\delta + \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}^{obj} - \frac{\nu}{\eta} tr(\sigma).\delta + \frac{1+\nu}{\eta}\sigma$$

3. Description de l’effort



- Longueur initiale : l_0 .
- Aire initiale : s_0
- l(t) et s(t) à l'instant t.
- Effort de traction : P(t) et on considère P(0)=0
- Pas de déplacement à la base : s(0)=**s0**
- P(t) est la seule force :

$$P(t) = \sigma_{xx}(t).s(t) \rightarrow \sigma_{xx}(t) = \frac{P(t)}{s(t)}$$

- Donc $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et de ce fait $\sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)}$

4. Propriété de la transformation et conséquences

- Tenseur des transformations linéaires tangentes F identifié à sa transformation linéaire tangente.
- t=0 comme référence
- Le tenseur F est diagonal
- Transformation de la forme :

$$x = f_x(t).X$$
$$y = f_y(t).Y$$
$$z = f_z(t).Z$$

$$f_z = f_y$$

- D'après la géométrie de la poutre :

$$z = f_y(t).Z$$

donc :

$$s(t) = y_0 f_y(t).z_0 f_y(t) = s_0 f_y^2(t)$$

- On remarque aussi que :

- La transformation étant quasi-statique, on a F inversible et : fx (t)≠0 et fy(t)≠0.
- On a alors :

$$\underset{v}{\rightarrow}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x'(t).X \\ f_y'(t).Y \\ f_y'(t).Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_x'(t).x}{f_x(t)} \\ \frac{f_y'(t).y}{f_y(t)} \\ \frac{f_y'(t).z}{f_y(t)} \end{bmatrix}$$

- On en déduis :

$$G = grad_x \underset{v}{\rightarrow}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} \end{bmatrix}$$

$$D = sym(G) = G$$

$$W = antisym(G) = [0]$$

5. Calcul des dérivées objectives

- Dérivée de Jaumann :

$$\breve{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma.W - W.\sigma = \dot{\sigma} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dérivée de Truesdell :

$$\breve{\sigma} = \dot{\sigma} - G.\sigma - \sigma.\,{}^tG + \sigma.div_x\left(\underset{v}{\rightarrow}(x,y,z,t)\right) = \dot{\sigma} - 2G.\sigma + \sigma.div_x\left(\underset{v}{\rightarrow}(x,y,z,t)\right)$$

$$div_x\left(\underset{v}{\rightarrow}(x,y,z,t)\right) = trG = \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} + 2\frac{f_y'(t)}{f_y(t)}$$

$$\breve{\sigma} = \begin{bmatrix} \dfrac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} - \dfrac{f_x'(t)}{f_x(t)}\dfrac{P(t)}{s(t)} + 2\dfrac{P(t)}{s(t)}\dfrac{f_y'(t)}{f_y(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dérivée de Cotter-Rivling :

$$\hat{\sigma} = \dot{\sigma} + G.\sigma + \sigma.\,{}^tG = \dot{\sigma} + 2G.\sigma = \begin{bmatrix} \dfrac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} + 2\dfrac{f_x'(t)}{f_x(t)}\dfrac{P(t)}{s(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\eta = +\infty$

Du fait que : $\eta = +\infty$; on peut simplifier directement la relation de D :

$$D = -\frac{\nu}{E} tr(\dot{\sigma}^{obj}).\delta + \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}^{obj}$$

❖Dérivée de Jaumann

$$\begin{bmatrix} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} \end{bmatrix} = -\frac{\nu}{E} tr\begin{bmatrix} \frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\delta + \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix} \frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il faut distinguer deux cas : $\nu = 0 \rightarrow \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = 1 \rightarrow f_y(t) = K_y e^t = e^t$ et $f_x(t) = K_x e^{\frac{P(t)}{E.s(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E.s_0.f_y^2(t)}}$ d'après C.I.

1 $\nu \neq 0 \rightarrow f_y(t) = f_x(t)^{-\nu}$ $f_y(t) = f_x(t)^{-\nu}$ $f_x(t) = e^{\frac{P(t)}{E.s(t)}} = e^{\frac{P(t)}{E.s_0.f_y^2(t)}}$

2 et

Pilotage en force

On connaît la force de traction appliqué à la poutre et on cherche f(t).

On réarrange l'équation : $$\frac{P(t)}{E.s_0} = \ln\left(f_x(t)\right).e^{-2\nu\ln(f_x(t))}$$

Et on intègre par rapport à ν :

$$\frac{P(t)}{E.s_0}.\nu + K_\nu = -\frac{1}{2}.e^{-2\nu\ln(f_x(t))} \rightarrow f_x(t) = (K_\nu + -2\nu\frac{P(t)}{E.s_0})^{-2\nu} = (1 - 2\nu\frac{P(t)}{E.s_0})^{-\frac{1}{2\nu}}$$

Pilotage en déplacement

On connaît le déplacement longitudinal que subit la poutre et on cherche P(t)

$$\nu \neq 0$$

On a :

$$f_x(t) = e^{\frac{P(t)f_x^{2\nu}(t)}{E.s_0}} \rightarrow P(t) = \frac{E.s_0}{f_x^{2\nu}(t)}\ln\left(f_x(t)\right)$$

Donc :

❖Dérivée de Truesdell

$$*\ \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\frac{P(t)}{s(t)} + 2\frac{P(t)}{s(t)}\frac{f_y'(t)}{f_y(t)}\right)$$

$$\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E}\left(\frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\frac{P(t)}{s(t)} + 2\frac{P(t)}{s(t)}\frac{f_y'(t)}{f_y(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{E}\left(\frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\frac{P(t)}{s(t)} - 2\nu\frac{P(t)}{s(t)}\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\right)$$

On a : $\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E}\left(\sigma'(t) - \sigma(t)\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}(1+2\nu)\right)$ $et\ f_x(t) = K.f_y(t)^{-\nu} = f_y(t)^{-\nu}$ $d'après\ les\ C.I.$

➢ **Pilotage en déplacement**

solution évidente de l' équation : $\sigma_1(t) = -\frac{E}{1+2\nu}$

$$\sigma_0(t) = K.f_x(t)^{1+2\nu}$$

Après résolution de l'équation homogène on a :

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_0(t) = -\frac{E}{1+2\nu} + K.f_x(t)^{1+2\nu}$$

La solution générale est donc : $\sigma(t) = \frac{E}{1+2\nu}(f_x(t)^{1+2\nu} - 1)$

Et d'après les C.I. :

$$P(t) = \sigma(t).s(t) = \sigma(t).s_0 f_y^2(t) = \sigma(t)s_0 f_x(t)^{-2\nu} = \frac{E}{1+2\nu}(f_x(t) - f_x(t)^{-2\nu})$$

❖Dérivée de Cotter-Rivling

$$* \frac{f_y'(t)}{f_y(t)} = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} + 2\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\frac{P(t)}{s(t)}\right)$$

$$\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E}\left(\frac{P'(t).s(t) - P(t).s'(t)}{s^2(t)} + 2\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\frac{P(t)}{s(t)}\right)$$

On a : $\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{1}{E}\left(\sigma'(t) + 2\sigma(t)\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\right)$ $et\ f_x(t) = K.f_y(t)^{-\nu} = f_y(t)^{-\nu}\ \ d'après\ les\ C.I.$

- **Essai piloté en déplacement**

Solution évidente de l'équation : $\sigma_1(t) = \frac{E}{2}$

Après résolution de l'équation homogène on a : $\sigma_0(t) = K.f_x(t)^{-2}$

La solution générale est donc : $\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_0(t) = \frac{E}{2} + K.f_x(t)^{-2}$

Et d'après les C.I. : $\sigma(t) = \frac{E}{2}(1 - f_x(t)^{-2})$

$$P(t) = \sigma(t).s(t) = \sigma(t).s_0 f_y^2(t) = \sigma(t)s_0 f_x(t)^{-2\nu} = \frac{E s_0}{2}(f_x(t)^{-2\nu} - f_x(t)^{-2(1+\nu)})$$

2. Comportement viscoélastique : $\eta \in]0,+\infty[$

On reprend l'équation : $D = -\frac{\nu}{E} tr(\dot{\sigma}^{obj}).\delta + \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}^{obj} - \frac{\nu}{\eta} tr(\sigma).\delta + \frac{1+\nu}{\eta}\sigma$

On connaît $f_x(t)$ on cherche P(t).

❖ Dérivée de Jaumann

On part de : $\left| \begin{array}{l} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{(P'(t).s(t) - P(t).s'(t))}{E.s^2(t)} + \frac{P(t)}{\eta.s(t)} \\ \frac{f_{y'(t)}}{f_{y(t)}} = -\nu.\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \end{array} \right|$ après simplification.

En remplaçant s(t) dans l'équation on trouve : $\frac{E.s_0.f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2.\nu}}$ = P'(t)+P(t).($\frac{E}{\eta} + 2.\nu.\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}$)

D'où P'(t)=-P(t).($\frac{E}{\eta} + \frac{2.\nu.f_x'(t)}{f_x(t)}$)+ $\frac{E.s_0.f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2.\nu}}$

Pour rejoindre le schéma d'Euler on pose L(P,t)=-P.($\frac{E}{\eta} + 2\nu\frac{f_x'(t)}{f_x(t)}$)+$\frac{E.s_0.f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2.\nu}}$)

Par conséquent on obtient le schéma suivant : P_{i+1}=P_i+h.(-P_i.($\frac{E}{\eta} + \frac{2.\nu.}{(1+i.h)}$)+ $\frac{E.s_0}{(1+i.h)^{1+2.\nu}}$)

❖Dérivée de Truesdell

On part de : $$\left|\begin{array}{c} \frac{f_x'(t)}{f_x(t)} = \frac{(P'(t).s(t)-P(t).s'(t))}{E.s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)}.\left(2.\frac{f'_{y(t)}}{f_{y(t)}} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\right) + \frac{P(t)}{\eta.s(t)} \\ \frac{f_{y'(t)}}{f_{y(t)}} = -\nu\frac{f_x'(t)}{f_x(t)} \end{array}\right|$$

En remplaçant s(t) dans l'équation on trouve : $\frac{E.s_0.f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2.\nu}}$ = P'(t)+P(t).$\left(\frac{E}{\eta} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\right)$

D'où $P'(t) = -P(t)\left(\frac{E}{\eta} - \frac{f_x'(t)}{f_x(t)}\right)\mathrm{E}.s_0.\frac{f_x'(t)}{f_x(t)^{1+2.\nu}} +$

Par conséquent on obtient le schéma suivant : P_{i+1}=P_i+h.(-P_i.$\left(\frac{E}{\eta} - \frac{1}{(1+i.h)}\right)$+ $\frac{\mathrm{E}.s_0}{(1+\mathrm{i.h})^{1+2.\nu}}$)

❖Dérivée de Cotter-Rivlin

On part de : $\left| \begin{array}{c} \frac{f_x{}'(t)}{f_x(t)} = \frac{(P'(t).s(t) - P(t).s'(t))}{E.s^2(t)} + 2.\frac{P(t)}{s(t)}.\frac{f_x{}'(t)}{f_x(t)}) + \frac{P(t)}{\eta.s(t)} \\ \frac{f_{y'(t)}}{f_{y(t)}} = -\nu \frac{f_x{}'(t)}{f_x(t)} \end{array} \right|$

En remplaçant s(t) dans l'équation on trouve : $E.s_0 \frac{f_x{}'(t)}{f_x(t)^{1+2.\nu}}$ = P'(t)+P(t).($\frac{E}{\eta} + 2.(1+\nu).\frac{f_x{}'(t)}{f_x(t)}$)

Par conséquent on obtient le schéma suivant : P_{i+1}=P_i+h.(-P_i.($\frac{E}{\eta} + 2.(1+\nu).\frac{1}{(1+i.h)}$)+ $\frac{E.s_0}{(1+i.h)^{1+2.\nu}}$)

Conclusion

- ?