



Ministère de l'écologie, de
l'Énergie, du développement
durable et de l'aménagement du
territoire

École nationale des travaux
publics de l'État

PROJET DE MODELISATION

TRANSFORMATIONS FINIES D'UNE POUTRE VISCOÉLASTIQUE

DUFFY Loïc
GILLE Laure-Anne
RALLU Antoine

Groupe 5B

Mai 2008

rue Maurice Audin
69518 Vaulx-en-Velin Cedex
téléphon : +33 (0)4 72 04 70 70
télécopie : +33 (0)4 72 04 62 54
<http://www.entpe.fr>

Table des matières

1.Présentation.....	3
2.Un effort de traction simple.....	3
3.Un comportement linéaire.....	3
Dérivée de Jaumann	4
Dérivée de Truesdell	5
Dérivée de Cotter-Rivlin	5
4.Des déformations.....	5
5.Un matériau déformable.....	5
6.Comportement hypoélastique.....	6
Dérivée de Jaumann	6
Essai piloté en force.....	6
Essai piloté en déplacement.....	6
Dérivée de Truesdell	7
Essai piloté en force.....	7
Essai piloté en déplacement.....	7
Dérivée de Cotter-Rivlin	8
Essai piloté en force.....	8
Essai piloté en déplacement.....	8
7.Comportement viscoélastique.....	8
Dérivée de Jaumann.....	9
Dérivée de Truesdell	9
Dérivée de Cotter-Rivlin	9

1. PRÉSENTATION

L'objectif du présent dossier est l'étude et la modélisation d'une poutre droite de section constante soumise, à partir de l'instant initial $t=0$ à un essai de traction simple dans la direction horizontale Ox_1 de sa fibre moyenne.



Les actions à distance ne sont pas prises en compte.

L'extrémité gauche de la poutre, d'abscisse $x=0$, reste fixe.

2. UN EFFORT DE TRACTION SIMPLE

On désigne par l_0 la longueur initiale de la poutre et par $l(t)$ sa longueur à l'instant $t \geq 0$.

On désigne s_0 par l'aire initiale des sections droites de la poutre et par $s(t)$ leur aire à l'instant t .

L'effort de traction appliqué à l'instant t à l'extrémité droite de la poutre, d'abscisse $x=l(t)$, est noté $P(t)$. La fonction précédente est continûment dérivable et telle que $P(0)=0$. Cette effort est supposé uniformément réparti dans chaque section droite, si bien que la transformation de la poutre est linéaire.

$$\text{Alors : } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)} .$$

3. UN COMPORTEMENT LINÉAIRE

La transformation est considérée comme linéaire, le tenseur des transformations linéaires tangentes F coïncident donc avec sa transformation linéaire tangente.

L'instant t étant choisi comme instant de référence, (X_1, X_2, X_3) représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée P et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de cette même particule à l'instant t .

La poutre est droite, les sections sont constantes et la section reste droite le long de la fibre neutre. Il n'y a pas de raison d'assister à une rotation de ces sections autour de la fibre neutre. On aura donc une expression du tenseur F sous la forme diagonale.

Le comportement de la poutre est linéaire. Les coordonnées du tenseur F ne dépendent donc que du temps.

De plus, la poutre est de section constante, donc x_2 et x_3 ne dépendent pas de X_1 . Et, l'effort $P(t)$ est uniformément réparti sur la section droite, donc x_1 ne dépend ni de X_2 , ni de X_3 . Et enfin la poutre est droite, donc x_2 et x_3 ne dépendent pas de X_2 , ni de X_3 .

La transformation est donc de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = f(t) \cdot X_1 \\ x_2 = g(t) \cdot X_2 \\ x_3 = h(t) \cdot X_3 \end{cases} \text{ où } f \text{ est la fonction définie précédemment et } g \text{ et } h \text{ deux autres fonctions}$$

continûment dérivable, croissante et telle que $g(0)=1$ et $h(0)=1$.

L'homogénéité et la forme des données incitent à rechercher une solution du problème d'évolution sous la forme d'une transformation homogène à chaque instant :

$$\begin{cases} x_1 = f(t) \cdot X_1 \\ x_2 = g(t) \cdot X_2 \\ x_3 = g(t) \cdot X_3 \end{cases}$$

Comme F est inversible (transformation est quasi-statique), $f(t) \neq 0$ et $g(t) \neq 0$.

On a alors :

$$\vec{v}(x, t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 = f'(t) \cdot X_1 = \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = g'(t) \cdot X_2 = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot x_2 \\ \dot{x}_3 = g'(t) \cdot X_3 = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Alors, on obtient le tenseur du gradient des vitesses : $G = \text{grad}_x \vec{v}(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{f'(t)}{f(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g'(t)}{g(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g'(t)}{g(t)} \end{pmatrix}$.

Celui-ci peut être décomposé en un tenseur de rotation W et un tenseur de déformation pure D tel que : $G = W + D$. Or G est symétrique d'où $W = 0$ et $G = D$.

Comme $W = 0$, on a en particulier la valeur du vecteur tourbillon : $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot}_x \vec{v} = \vec{0}$.

On obtient alors les valeurs des dérivées objectives de σ :

DÉRIVÉE DE JAUMANN $\check{\sigma}$

On a : $\check{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot W - W \cdot \sigma$

$$\text{Soit : } \check{\sigma} = \check{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DÉRIVÉE DE TRUESDELL $\check{\sigma}$

$$\text{On a : } \check{\sigma} = \dot{\sigma} - G \cdot \sigma - \sigma \cdot {}^t G + \sigma \cdot \text{div}_x \vec{v}$$

$$\text{Alors : } \check{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - 2 \cdot \frac{f'(t) \cdot P(t)}{f(t) \cdot s(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + 2 \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit : } \check{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'(t) \cdot P(t)}{f(t) \cdot s(t)} + \frac{2 \cdot g'(t) \cdot P(t)}{g(t) \cdot s(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DÉRIVÉE DE COTTER-RIVLIN $\hat{\sigma}$

$$\text{On a : } \hat{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot G + {}^t G \cdot \sigma$$

$$\text{Soit : } \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \cdot \frac{f'(t) \cdot P(t)}{f(t) \cdot s(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. DES DÉFORMATIONS

$$\text{On remarque que : } \sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)} = \frac{P(t)}{s_0 \cdot g(t)^2}$$

5. UN MATÉRIAU DÉFORMABLE

Le comportement du matériau est régi par la relation :

$$D = \frac{-\nu}{E} \cdot \text{tr}(\dot{\sigma}^{\text{obj}}) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{E} \cdot \dot{\sigma}^{\text{obj}} - \frac{\nu}{\eta} \cdot \text{Tr}(\sigma) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{\eta} \cdot \sigma$$

où $\dot{\sigma}^{\text{obj}}$ est une dérivée objective de σ , E le module de Young, ν le coefficient de poisson et η la viscosité.

6. COMPORTEMENT HYPOÉLASTIQUE

Par définition : $\eta = +\infty$.

$$\text{Alors : } D = \frac{-\nu}{E} \cdot \text{tr}(\sigma^{\text{obj}}) \cdot \delta + \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma^{\text{obj}} .$$

Ainsi, pour les trois dérivées objectives :

DÉRIVÉE DE JAUMANN

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-\nu}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{-\nu}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \frac{f'(t)}{f(t)} \end{cases}$$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \ln(f(t)) = \frac{1}{E} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} + C \\ g(t) = f(t)^{-\nu} \end{cases}$$

$$\text{Or } \sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)} = \frac{P(t)}{s_0 \cdot g(t)^2} , \quad P(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad . \text{Donc : } \begin{cases} \ln(f(t)) = \frac{1}{E} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} = \frac{1}{E} \cdot \sigma(t) \\ P(t) = \sigma(t) \cdot s_0 \cdot f(t)^{-2\nu} \end{cases} .$$

Deux cas :

- $\nu = 0$. Alors : $P(t) = \sigma(t) \cdot s_0 = E \cdot s_0 \cdot \ln(f(t))$. Ainsi $P(t)$ diverge lorsque $f(t) \rightarrow +\infty$.
- $\nu \neq 0$. Alors : $P(t) = \sigma(t) \cdot s_0 \cdot f(t)^{-2\nu} = E \cdot s_0 \cdot \ln(f(t)) \cdot f(t)^{-2\nu}$. On a

$$P'(f) = E \cdot s_0 \cdot f(t)^{-1-2\nu} \cdot (1 - 2\nu \cdot \ln(f)) . \text{ Cette fonction atteint un maximum en } \exp\left(\frac{1}{2\nu}\right) \text{ et est}$$

donc bornée.

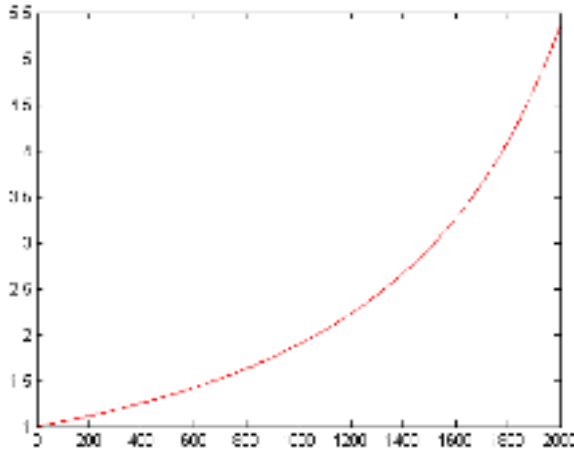
Essai piloté en force

On se fixe $P(t)$. On a : $\frac{P(t)}{E \cdot s_0} = \ln(f(t)) \cdot \exp((-2\nu) \cdot \ln(f(t)))$. En intégrant par rapport à ν , on a :

$$-2 \cdot \frac{P(t)}{E \cdot s_0} \cdot \nu + K = \exp((-2\nu) \cdot \ln(f(t))) . \text{ Or } P(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 , \text{ on a } K = 1 .$$

$$\text{Ainsi : } f(t) = \left(1 - 2\nu \cdot \frac{P(t)}{E \cdot s_0}\right)^{\frac{-1}{2\nu}} .$$

Soit :

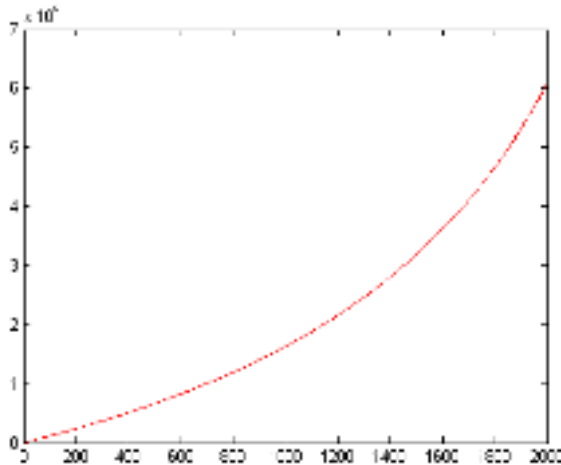


Evolution de l'élongation en fonction de la force appliquée

Cas particulier : $E=210000$ Pa ;
 $s_0=0.009$ m² ; $\nu=0.3$

De plus :
$$\sigma(t) = \frac{E \cdot P(t)}{E \cdot s_0 - 2\nu \cdot P(t)}$$

Ainsi :



Evolution de l'état de contrainte en fonction de la force appliquée

Cas particulier : $E=210000$ Pa ;
 $s_0=0.009$ m² ; $\nu=0.3$

Essai piloté en déplacement

On se fixe $f(t)$. Alors : $P(t) = \sigma(t) \cdot s_0 = E \cdot s_0 \cdot \ln(f(t)) \cdot f(t)^{-2\nu}$ et $\sigma(t) = E \cdot \ln(f(t))$.

DÉRIVÉE DE TRUESDELL

On a :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{-\nu}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'(t) \cdot P(t)}{f(t) \cdot s(t)} + \frac{2 \cdot g'(t) \cdot P(t)}{g(t) \cdot s(t)} \right) + \frac{1+\nu}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'(t) \cdot P(t)}{f(t) \cdot s(t)} + \frac{2 \cdot g'(t) \cdot P(t)}{g(t) \cdot s(t)} \right) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{-\nu}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{f'(t) \cdot P(t)}{f(t) \cdot s(t)} + \frac{2 \cdot g'(t) \cdot P(t)}{g(t) \cdot s(t)} \right) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \left(\frac{-f'(t)}{f(t)} + 2 \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} \right) \right) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{-\nu}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \left(\frac{-f'(t)}{f(t)} + 2 \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} \right) \right) \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \left(\frac{-f'(t)}{f(t)} + 2 \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} \right) \right) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \frac{f'(t)}{f(t)} \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} (1 + 2 \cdot \nu) \right) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \frac{f'(t)}{f(t)} \end{cases}$$

$$\text{Or } \sigma(t) = \frac{P(t)}{s(t)} = \frac{P(t)}{s_0 \cdot g(t)^2} \quad . \quad P(t) = \sigma(t) \cdot s_0 \cdot f(t)^{-2 \cdot \nu}$$

Essai piloté en force

On se fixe $P(t)$. **?????**

Essai piloté en déplacement

On se fixe $f(t)$. On a : $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma'(t) - \sigma(t) \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} (1 + 2 \cdot \nu))$.

- Solution particulière : $\sigma(t) = \frac{-E}{1 + 2 \cdot \nu}$.

- Équation homogène : $\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = (1 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)$. D'où une solution homogène :
 $\sigma(t) = A \cdot f(t)^{1 + 2 \cdot \nu}$.

- Solution générale : $\sigma(t) = A \cdot f(t)^{1 + 2 \cdot \nu} - \frac{E}{1 + 2 \cdot \nu}$. Or $\sigma(0) = 0$. Donc :

$$\sigma(t) = \frac{E}{1 + 2 \cdot \nu} \cdot (f(t)^{1 + 2 \cdot \nu} - 1)$$

Alors : $P(t) = \frac{E \cdot s_0}{1 + 2 \cdot \nu} \cdot f(t) \cdot (1 - f(t)^{-(1 + 2 \cdot \nu)})$.

On remarque $P(t)$ n'est pas borné.

DÉRIVÉE DE COTTER-RIVLIN

On a :

$$\begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot 2 \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{-\nu}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{P(t)}{s(t)} \cdot 2 \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \frac{f'(t)}{f(t)} \end{cases}$$

Essai piloté en force

On se fixe $P(t)$. **?????**

Essai piloté en déplacement

On se fixe $f(t)$. On a : $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma'(t) - 2 \cdot \sigma(t) \cdot \frac{f'(t)}{f(t)})$.

- Solution particulière : $\sigma(t) = \frac{E}{2}$.
- Équation homogène : $\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = -2 \cdot \left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)$. D'où une solution homogène : $\sigma(t) = A \cdot f(t)^{-2}$.
- Solution générale : $\sigma(t) = A \cdot f(t)^{-2} + \frac{E}{2}$. Or $\sigma(0) = 0$. Donc : $\sigma(t) = \frac{E}{2} \cdot (1 - f(t)^{-2})$.

Alors : $P(t) = \frac{E \cdot s_0}{2} \cdot f(t)^{-2 \cdot \nu} \cdot (1 - f(t)^{-2})$.

On remarque : $P(f) = \frac{E \cdot s_0}{2} \cdot f^{-2 \cdot \nu} \cdot (1 - f^{-2})$. Donc : $P'(f) = \frac{E \cdot s_0}{2} \cdot f^{-2 \cdot \nu + 3} \cdot (-2 \cdot \nu \cdot f^2 + 2 + 2 \cdot \nu)$. Cette fonction en maximum en $\sqrt{\frac{1+\nu}{\nu}}$ et vaut $P(f) = \frac{E \cdot s_0}{2} \cdot \frac{\nu^\nu}{(1+\nu)^{1+\nu}}$. Si $\nu \rightarrow 0$, alors $P(f) \rightarrow \frac{E \cdot s_0}{2}$.

Tout comme la dérivée de Jaumann, cette dérivée n'est pas bien adaptée (effort borné).

VISUALISATION GRAPHIQUE DES RÉSULTATS

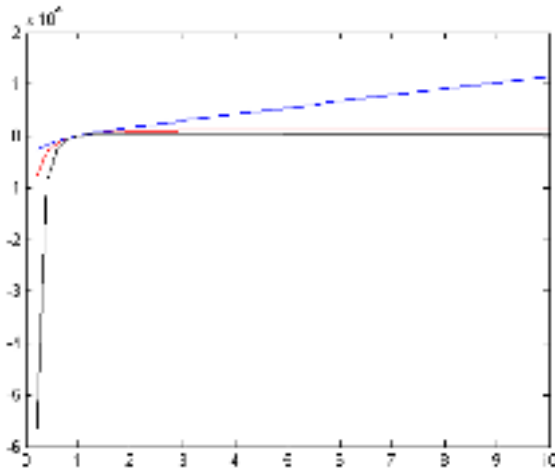
On se limite au cas de l'essai piloté en déplacement. On a :

Dérivée de Jaumann : $P(t) = \sigma(t) \cdot s_0 = E \cdot s_0 \cdot \ln(f(t)) \cdot f(t)^{-2 \cdot \nu}$ et $\sigma(t) = E \cdot \ln(f(t))$.

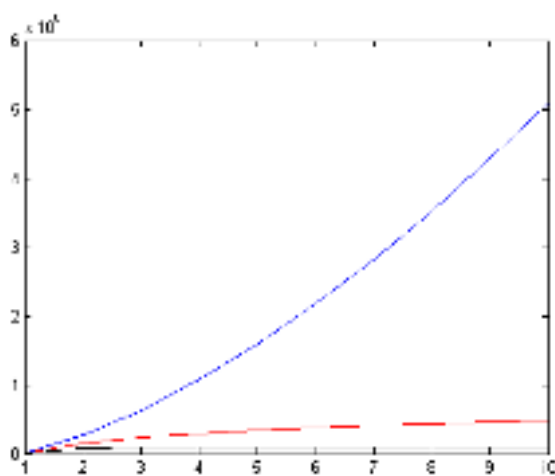
Dérivée de Truesdell : $P(t) = \frac{E \cdot s_0}{1 + 2 \cdot \nu} \cdot f(t) \cdot (1 - f(t)^{-(1+2 \cdot \nu)})$ et $\sigma(t) = \frac{E}{1 + 2 \cdot \nu} \cdot (f(t)^{1+2 \cdot \nu} - 1)$.

Dérivée de Cotter-Rivlin : $P(t) = \frac{E \cdot s_0}{2} \cdot f(t)^{-2 \cdot \nu} \cdot (1 - f(t)^{-2})$ et $\sigma(t) = \frac{E}{2} \cdot (1 - f(t)^{-2})$.

On suppose que $f(t) = 1 + t$. Alors :



Evolution de la force P obtenue à partir des différentes dérivées objectives (de haut en bas : Truesdell, Jaumann et Cotter-Rivlin) en fonction du temps
 Cas particulier : $E=210000$ Pa ;
 $s_0=0.009$ m² ; $\nu=0.3$



Evolution de la contrainte Sigma obtenue à partir des différentes dérivées objectives (de haut en bas : Truesdell, Jaumann et Cotter-Rivlin) en fonction du temps
 Cas particulier : $E=210000$ Pa ;
 $\nu=0.3$

7. COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE

Par définition : $\eta \in]0; +\infty[$. On se fixe $f(t)$.

Le schéma numérique de résolution de
$$\begin{cases} y'(t) = \Gamma(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
 est le schéma d'Euler explicite :

$P_{i+1} = P_i + h \cdot \Gamma(P_i, t_i)$. Ce schéma est convergent d'ordre 1 dès que f est lipschitzien par rapport à sa première variable et différentiable. La notion de stabilité d'un schéma ne garantit pas que les résultats numériques obtenus soient proches de la solution exacte. La notion de convergence garantit que, lorsque h tend vers zéro, les résultats numériques s'approchent de la solution exacte.

DÉRIVÉE DE JAUMANN

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-\nu}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P(t)}{g(t)} \\ \frac{g'(t)}{s(t)} = \frac{-\nu}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} - \frac{\nu}{\eta} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \end{array} \right.$$

$$\text{Or : } s(t) = s_0 \cdot g(t)^2 = s_0 \cdot f(t)^{-2\nu}$$

$$\text{Ainsi : } E \cdot s_0 \cdot f'(t) \cdot f(t)^{-1-2\nu} = P'(t) + P(t) \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2\nu \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right)$$

$$\text{Alors : } P'(t) = -P(t) \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2\nu \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) + E \cdot s_0 \cdot f'(t) \cdot f(t)^{-1-2\nu}$$

$$\text{Posons : } \Gamma(P, t) = -P \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2\nu \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) + E \cdot s_0 \cdot f'(t) \cdot f(t)^{-1-2\nu} \quad \text{et } f(t) = 1+t, \text{ on obtient alors le schéma :}$$

$$P_{i+1} = P_i + h \left(-P_i \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2\nu \cdot \frac{1}{(1+i \cdot h)} \right) + E \cdot s_0 \cdot (1+i \cdot h)^{-1-2\nu} \right)$$

DÉRIVÉE DE TRUESDELL

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \right) + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \end{array} \right.$$

$$\text{Or : } s(t) = s_0 \cdot g(t)^2 = s_0 \cdot f(t)^{-2\nu}$$

$$\text{Donc : } E \cdot s_0 \cdot f'(t) \cdot f(t)^{-1-2\nu} = P'(t) + P(t) \cdot \left(\frac{E}{\eta} - \frac{f'(t)}{f(t)} \right)$$

$$\text{Par le même raisonnement, on obtient le schéma : } P_{i+1} = P_i + h \left(-P_i \cdot \left(\frac{E}{\eta} - \frac{1}{(1+i \cdot h)} \right) + E \cdot s_0 \cdot (1+i \cdot h)^{-1-2\nu} \right)$$

DÉRIVÉE DE COTTER-RIVLIN

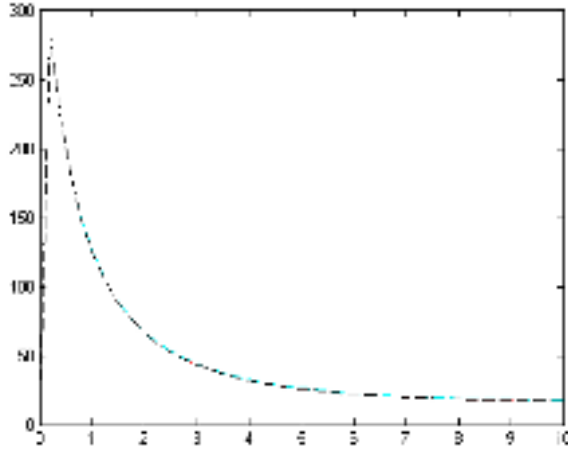
$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{P'(t) \cdot s(t) - P(t) \cdot s'(t)}{s^2(t)} + 2 \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \right) + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P(t)}{s(t)} \\ \frac{g'(t)}{g(t)} = -\nu \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } E \cdot s_0 \cdot f'(t) \cdot f(t)^{-1-2\nu} = P'(t) + P(t) \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2 \cdot (1+\nu) \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right)$$

Par le même raisonnement, on obtient le schéma :

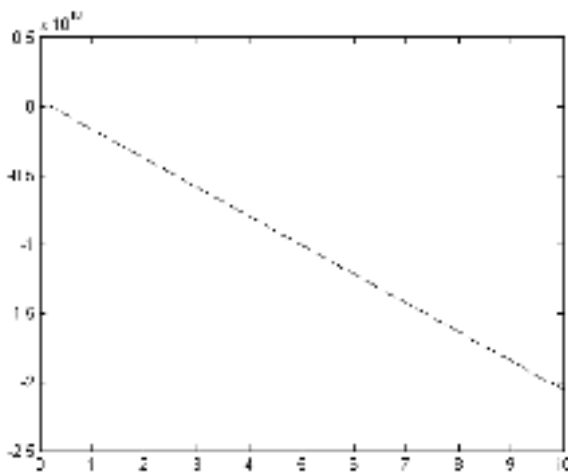
$$P_{i+1} = P_i + h \left(-P_i \cdot \left(\frac{E}{\eta} + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{1}{(1 + i \cdot h)} \right) + E \cdot s_0 \cdot (1 + i \cdot h)^{-1 - 2 \cdot \nu} \right)$$

VISUALISATION GRAPHIQUE DES RÉSULTATS



Evolution de la force P obtenue à partir des différentes dérivées objectives (Truesdell, Jaumann et Cotter-Rivlin sont confondues) en fonction du temps

Cas particulier : E=210000 Pa ;
 s₀=0.009 m² ; nu=0.3 ;
 etha=1000000000 .



Evolution de la force P obtenue à partir des différentes dérivées objectives (Truesdell, Jaumann et Cotter-Rivlin sont confondues) en fonction du temps

Cas particulier : E=210000 Pa ;
 s₀=0.009 m² ; nu=0.3 ;
 etha=0.00002 (cas de l'huile) .

8. ANNEXES

COMPORTEMENT HYPOÉLASTIQUE

% Dérivée de Jaumann - Essai piloté en force : f = f(P) %%%%%%%%%%

l=10;

n=50;

E=210000;

```

s=0.009;
nu=0.3;
etha=1000000000;
m=2000;
K=fauman(l,n,E,s,nu,etha,m);
plot(K(1:m,1),K(1:m,2),'-r')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%On teste toute les valeurs de P de 1 à 2000 et on trace la réponse c'est à dire l'élongation en fonction de la force
appliquée
function [K]= fauman(l,n,E,s,nu,etha,m)
for i=1:m
    K(i,1)=i;
    K(i,2)=(1-2*nu*K(i,1)/(E*s))^(1/(2*nu));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Dérivée de Jaumann - Tracé de  $\sigma = f(P)$  %%%%%%%%%
l=10;
n=50;
E=210000;
s=0.009;
nu=0.3;
etha=1000000000;
m=2000;
K=sauman(l,n,E,s,nu,etha,m);
plot(K(1:m,1),K(1:m,2),'-r')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%On teste toute les valeurs de P de 1 à 2000 et on trace l'état de contrainte associé
function [K]= sauman(l,n,E,s,nu,etha,m)
for i=1:m
    K(i,1)=i;
    K(i,2)=E*K(i,1)/(E*s-2*nu*K(i,1));
end

```

%%%%%%%%%

% Tracé de $P(t)$ - Étude en déplacement %%%%%%%%%%

l=10;

n=50;

E=210000;

s=0.009;

nu=0.3;

etha=1000000000;

[J,T,CR]=dep(l,n,E,s,nu,etha)

plot(J(1:n,1),J(1:n,2),'-r')

hold on

plot(T(1:n,1),T(1:n,2),'-b')

hold on

plot(CR(1:n,1),CR(1:n,2),'-k')

hold on

%%%%%%%%%

%on suppose une évolution linéaire en fonction du temps de f et on trace la P qui correspond à cette évolution

function [J,T,CR]=dep(l,n,E,s,nu,etha)

for i=1:n

h=l/n

% valeur de P(t) pour la dérivée de Jaumann

J(i,1)=i*h;

J(i,2)=E*s*log(J(i,1))*J(i,1)^(-2*nu);

% valeur de P(t) pour la dérivée de Truesdell

T(i,1)=i*h;

T(i,2)=(E*s/(1+2*nu))*T(i,1)*(1-T(i,1)^(-1-2*nu));

% valeur de P(t) pour la dérivée de Cotter-Rivlin

CR(i,1)=i*h;

CR(i,2)=(E*s/2)*(1-T(i,1)^-2)*T(i,1)^(-2*nu);

end

%%%%%%%%%

% Tracé de $\sigma(t)$ - Étude en déplacement %%%%%%%%%%

```
l=10;
n=10;
E=210000;
s=0.009;
nu=0.3;
etha=1000000000;
[J,T,CR]=sigdep(l,n,E,s,nu,etha)
plot(J(1:n,1),J(1:n,2),'-r')
hold on
plot(T(1:n,1),T(1:n,2),'-b')
hold on
plot(CR(1:n,1),CR(1:n,2),'-k')
hold on
```

%%%%%%%%%

%on suppose une évolution linéaire en fonction du temps de f et on trace l'état de contrainte qui correspond à cette évolution

```
function [J,T,CR]=dep(l,n,E,s,nu,etha)
for i=1:n
    h=l/n
    J(i,1)=i;
    J(i,2)=E*log(J(i,1));
    T(i,1)=i;
    T(i,2)=(E/(1+2*nu))*(T(i,1)^(1+2*nu)-1);
    CR(i,1)=i;
    CR(i,2)=(E/2)*(1-T(i,1)^-2);
end
```

%%%%%%%%%

COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE

% Tracé de $P(t)$ - Étude en déplacement (expression discrétisée de P) %%%%%%%%%%

```
l=10;
```

```

n=50;
E=210000;
s=0.009;
nu=0.3;
etha=1000000000;
L1=jaumann(1,n,E,s,nu,etha);
L2=truesdell(1,n,E,s,nu,etha);
L3=cotterivlin(1,n,E,s,nu,etha);
plot(L1(1:n+1,1),L1(1:n+1,2),'-r')
hold on
plot(L2(1:n+1,1),L2(1:n+1,2),'-c')
hold on
plot(L3(1:n+1,1),L3(1:n+1,2),'-k')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [L1]=jaumann(1,n,E,s,nu,etha)
%l: longueur de l'intervalle de temps
%n: nombre de points sur cet intervalle
%h: pas entre 2points
h=1/n;
L1=[0 0];
P=0;
for i=1:n
    L1(i+1,1)=h*i;
    L1(i+1,2)=L1(i,1)*(1-h*(E/etha+2*nu/(1+i*h)))+h*E*s*(1+(i*h))^(1-2*nu);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [L2]=truesdell(1,n,E,s,nu,etha)
%l: longueur de l'intervalle de temps
%n: nombre de points sur cet intervalle
%h: pas entre 2points
h=1/n;
L2=[0 0];
P=0;

```



```

for i=1:n
    L2(i+1,1)=h*i;
    L2(i+1,2)=L2(i,1)*(1-h*(E/etha-1/(1+i*h)))+h*E*s*(1+(i*h))^(1-2*nu);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [L3]=cotterrivlin(l,n,E,s,nu,etha)
%l: longueur de l'intervalle de temps
%n: nombre de points sur cet intervalle
%h: pas entre 2points
h=l/n;
L3=[0 0];
P=0;
for i=1:n
    L3(i+1,1)=h*i;
    L3(i+1,2)=L3(i,1)*(1-h*(E/etha+2*(1+nu)/(1+i*h)))+h*E*s*(1+(i*h))^(1-2*nu);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```