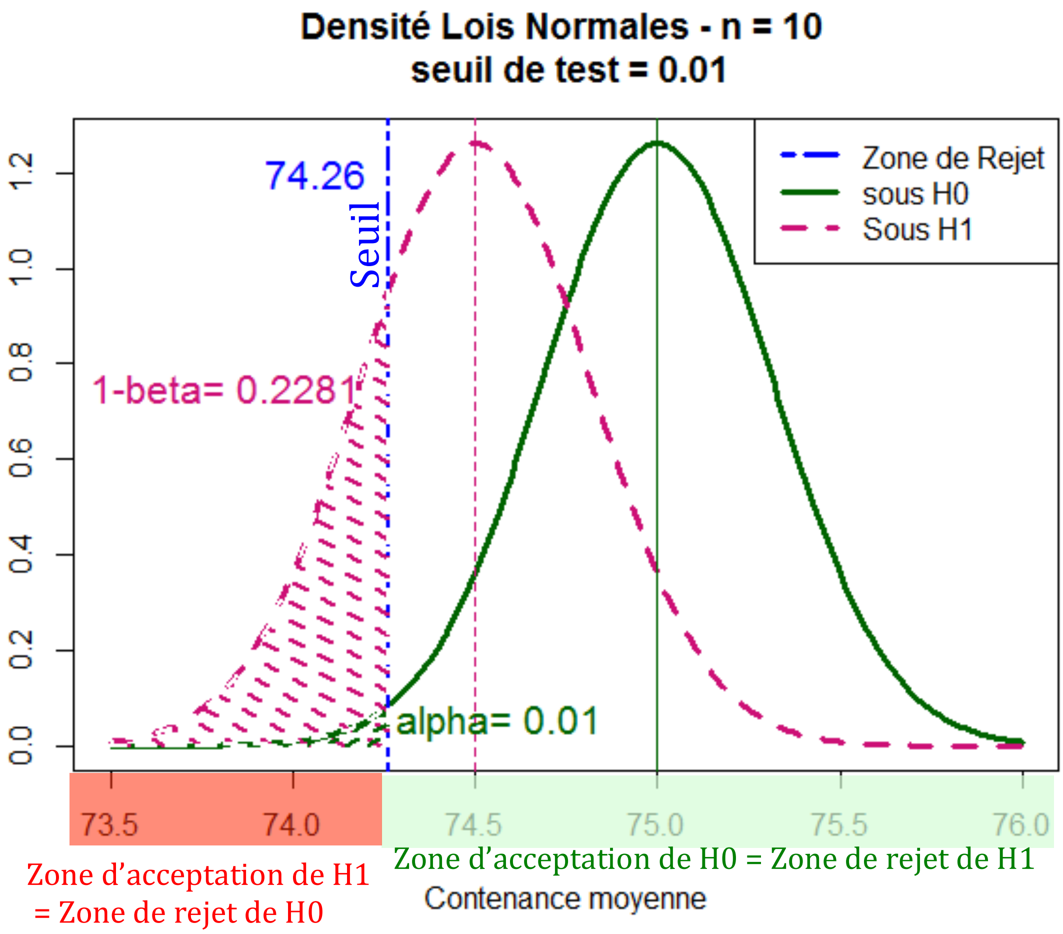
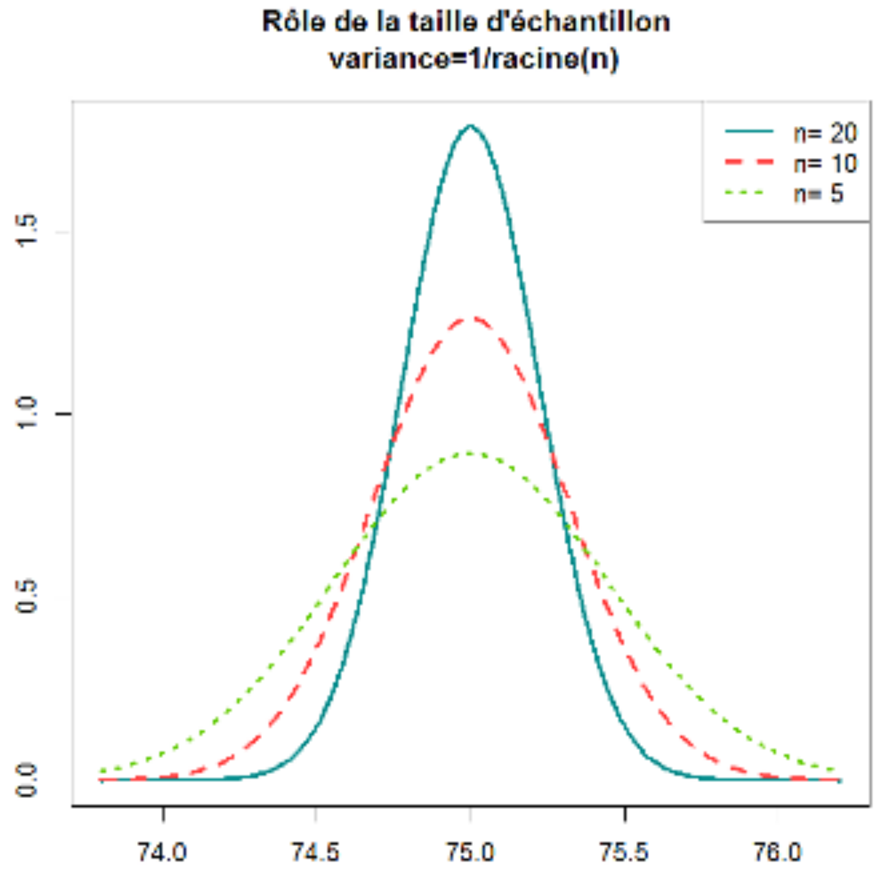
Éléments de réponse pour TD4 de MSI :

***Ex 1* :** Contenu d'une bouteille de vin :

Représentation du seuil fixé et déterminé par le choix du risque alpha, ainsi que des différentes zones de prédominance de chacun des modèles dictés par H0 et H1 :



Représentation de l'influence de la taille de l'échantillon n (cf ex1 Q4)



Ex 2 : *Temps de vol d'un avion:*

But : Test sur la moyenne m d'une loi normale avec une variance σ connue

Hypothèses :

- H0 : $m = m_0 = 16h25$
- H1 : $m \neq m_0 = 16h25$

➔Test bilatéral, d'après la forme des hypothèses formulées

Variable de décision : x^{barre}

$T = (x^{barre} - m)/\sigma \backslash \sqrt{n} \sim N(0, 1)$

Résultats :

$\alpha = 5\%$

$u_{\alpha/2} = -1,96$

$T = -3,5$

➔ $T < u_{\alpha/2}$

➔ H0 rejetée, il y a une différence de moyenne conséquente.

Ex 3 : *Dosage du glucose sanguin :*

But : Test sur la variance σ d'une loi normale avec une moyenne m inconnue

Hypothèses :

- H0 : $\sigma \geq 0{,}05$
- H1 : $\sigma < 0{,}05$

➔ Test unilatéral à gauche, d'après la forme des hypothèses formulées

Variable de décision : s^2

$Z = ns^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

Résultats :

$\alpha = 5\%$

$\chi^2(5 ; 0{,}05) = 1{,}15$

$Z = 5*(0{,}019)^2/ (0{,}05)^2 = 0{,}75$

➔ $Z< \chi^2(5 ; 0{,}05)$

➔ H0 rejetée, la nouvelle technique est plus précise

Ex 4 : *Charges de rupture de câble :*

But : Test sur la moyenne m d'une loi normale avec une variance σ inconnue

Hypothèses :

- H0 : $m \leq m_0=99$ kg
- H1 : $m > m_0$

➔ Test unilatéral à droite, d'après la forme des hypothèses formulées

Variable de décision : T_{n-1}

$T_{n-1} = (x^{barre} - m_0) /s/\sqrt{(n-1)} \sim t_{n-1}$ (loi de Student à n-1 degrés de liberté (ddl))

Résultats :

$\alpha = 5\%$ è $1-\alpha = 0{,}95$ (unilatéral à droite)

$t_{n-1}(0{,}95) = 1{,}833$ (Par lecture des tables)

$T_{n-1} = (102-99)/(2{,}16/3) = 4{,}16666$

➔ $T_{n-1} > t_{n-1}(0{,}95)$

➔ H0 rejetée, la nouvelle charge de rupture est plus importante et donc le nouveau procédé plus efficace

Ex 5 : Laboratoire pharmaceutique :

But : Test sur la moyenne m d'une loi normale avec une variance σ connue

Hypothèses :

- H0 : $m = m_0 = 10$ mg
- H1 : $m \neq m_0$

➔ Test bilatéral, d'après la forme des hypothèses formulées
➔ Risque $\alpha/2$ à gauche et $1-\alpha/2$ à droite

Variable de décision : $x^{barre} \sim N(m ; \sigma/\sqrt{n})$

➔ L'expression des seuils $h_1 = m_0 + [u_{\alpha/2} * (\sigma/\sqrt{n})]$ et $h_2 = m_0 + [u_{1-\alpha/2} * (\sigma/\sqrt{n})]$ centré-réduit sous H_1 (voir résolution Ex 1 Q1, 2 ou 4)
• <u>à gauche avec $\alpha/2$:</u>
On a : $\mathbf{u_{1-\beta} = u_{\alpha/2} + (m_0 - m_1) / (\sigma/\sqrt{n})}$
<u>• à droite avec $1-\alpha/2$:</u>
En procédant de même, mais en faisant attention au sens des inégalités dans l'expression de la probabilité : $1-\beta = P(x^{barre} > h2 \mid H1) = 1 - P(x^{barre} \leq h2 \mid H1)$,
on a : $\mathbf{u_{\beta} = u_{1-\alpha/2} + (m_0 - m_1) / (\sigma/\sqrt{n})}$

➔ Bien préciser pourquoi on peut négliger un des termes (en comparant h_i, m_0 et m_1)

Q1 :
a) $m_{H1} = 10{,}4$ mg è $1-\beta = 0{,}98$ (par lecture des tables)
Dans 98% des cas, on pourra s'apercevoir que le cas vrai est en réalité 10,4 mg.

b) $m_{H1} = 9{,}8$ mg è $1-\beta = 0{,}515$
(Diminution de la puissance du test, i.e. de la capacité à mettre en évidence la différence)

Q2 :
[**Attention** : test bilatéral !!!
➔ Zone de rejet de H0 : $\mathbf{\alpha = P(x^{barre} < h1) + P(x^{barre} > h2)}$
où : $h1 = m_0 + u_{\alpha/2} * \sigma/\sqrt{n}$
et $h2 = m_0 + u_{1-\alpha/2} * \sigma/\sqrt{n}$]

On se place à gauche (on veut augmenter la puissance du test 1.b) qui est la plus faible). On néglige donc la seconde composante (faire un schéma pour mieux comprendre, si nécessaire). On a alors :

$$\mathbf{u_{1-\beta} \approx u_{\alpha/2} + (m_0 - m_1) / (\sigma/\sqrt{n})} \quad \text{(à gauche avec } \alpha/2\text{)}$$

Résultat : n = 131, 3 è 132 comprimés sont nécessaires

Q3 :

Hypothèses inchangées.

Les seuils sont fixés à l'avance : $h_1 = m_0 - 0.15$ et $h_2 = m_0 + 0.15$.

D 'après l'énoncé : $-u_{\alpha/2} * \sigma/\sqrt{n} = u_{1-\alpha/2} * \sigma/\sqrt{n} = 0{,}15$ mg.

On pose $T = x^{barre} – m / (\sigma/\sqrt{n})$ (où m = m0 ou m1 suivant l'hypothèse) la valeur centrée-réduite.

- Risque de première espèce :

On a : $\alpha = P(|T| > | u_{\alpha/2} | | H_0) = [P(T < u_{\alpha/2})] + [P(T > u_{1-\alpha/2})]$

$= [P(T < -u_{1-\alpha/2})] + [P(T> u_{1-\alpha/2})]$

$= [P(T> u_{1-\alpha/2})] + [P(T> u_{1-\alpha/2})]$ (par symétrie de N(0, 1))

$= 2[1- P(T < u_{1-\alpha/2})]$

$= 2 – 2 * P(T < 0{,}15/(\sigma/\sqrt{n}))$

$= 13{,}3$ %

ou :

on a : $\alpha = P(|T| > | u_{\alpha/2} | | H_0) = [P(T < u_{\alpha/2})] + [P(T > u_{1-\alpha/2})] =$

$= 2 [P(T < u_{\alpha/2})]$ (par symétrie de N(0, 1))

Soit : $\alpha/2 = [P(T < u_{\alpha/2})] = [P(T < (h_1-m_0) /(\sigma/\sqrt{n}))]$

D'où : $u_{\alpha/2} = (h_1-m_0) /(\sigma/\sqrt{n}) = -1{,}5$

D 'après les tables $1- (\alpha/2) = 0{,}9332$

- Puissance du test :

On a : $1-\beta = P (x^{barre} < h_1 | H_1) + P (x^{barre} > h_2 | H_1)$

$= P((x^{barre}-m_1) / (\sigma/\sqrt{n}) < (h_1-m_1) /(\sigma/\sqrt{n}))$

$+ P((x^{barre}-m_1) / (\sigma/\sqrt{n}) > (h_2-m_1) /(\sigma/\sqrt{n}))$

$= P(T < -5{,}5 | H_1) + P(T > -2{,}5 | H_1)$

$= P(T < -5{,}5 | H_1) + P(T < 2{,}5 | H_1)$ (par symétrie de N(0, 1))

$= 10\text{^}(-8) + 0{,}9938$

$\approx 0{,}9938$

On aurait donc bien pu supposer que $P(x^{barre} < h_1 | H_1) \approx 0$, étant donné que l'on suppose $m_1 = 10{,}4$mg $> m_0$.

La puissance du test est de 99,4%.