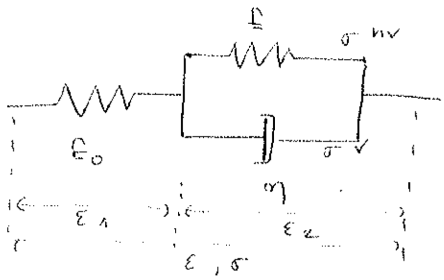
$\boxed{19,5}$ + 13

Examen

Exercice 1 : ~~7/7~~ (9/9)

1/ fonction de fluage $f(t)$




on applique une contrainte constante $\sigma = \sigma_0$

on a : $\begin{cases} \sigma = \sigma^{nv} + \sigma^{v} \\ \varepsilon = \varepsilon^{1} + \varepsilon^{2} \end{cases}$ $\qquad \varepsilon^1 = \frac{\sigma}{E_0}$ et $\varepsilon^2 = \frac{\sigma^{nv}}{E}$ et $\dot{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\eta}\sigma^{v}$

d'où : $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_0}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma^{v}$

$= \frac{1}{E_0}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma^{nv})$

or : $\sigma^{nv} = E\,\varepsilon^2 = E(\varepsilon - \varepsilon^1) = E\left(\varepsilon - \frac{1}{E_0}\sigma\right)$

d'où : $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_0}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\left[\sigma - E\left(\varepsilon - \frac{1}{E_0}\sigma\right)\right]$

$\Longleftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{1}{E_0}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)\sigma$

$\rightarrow$ transformation de Carson : $\tilde{\varepsilon}(p)\left[p + \frac{E}{\eta}\right] = \tilde{\sigma}(p)\left[\frac{p}{E_0} + \frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)\right]$ (*)

$\sigma(t) = \sigma_0 \Rightarrow \tilde{\sigma}(p) = \sigma_0$

d'où : $\tilde{\varepsilon}(p) = \sigma_0\left[\frac{1}{E_0}\cdot\frac{p\,\eta/E}{1 + \eta/E\,p} + \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{E_0}\right]\cdot\frac{1}{1 + \eta/E\,p}\right]$

ainsi : $\tilde{f}(p) = \frac{1}{E_0}\,\frac{p\,\eta/E}{1 + \eta/E\,p} + \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_0}\right)\frac{1}{1 + \eta/E\,p}$.

donc : $f(t) = \frac{1}{E_0}e^{-t/\tau} + \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_0}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau^{-1} = E/\eta$

d'où : $f(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ oui

2

2/ fonction de relaxation : $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ on cherche $\sigma(t)$

La relation (*) donne : $\tilde{\sigma}(p) = \varepsilon_0 \cdot \dfrac{p + E/\eta}{\frac{p}{E_0} + \frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{E}{E_0}\right)}$

$= \varepsilon_0\left[\frac{E E_0}{E + E_0}\cdot\frac{1}{1 + \frac{\eta}{E + E_0}p} + \frac{p\cdot\frac{\eta}{E + E_0}}{1 + \frac{\eta}{E + E_0}p}\cdot E_0\right]$

d'où : $\tilde{r}(p) = \frac{E E_0}{E+E_0} \frac{1}{1+\frac{\eta}{E+E_0}p} + E_0 \frac{p\frac{\eta}{E+E_0}}{1+\frac{\eta}{E+E_0}p}$

d'où : $r(t) = \frac{E E_0}{E+E_0}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right) + E_0 e^{-t/\tau'}$ avec $\tau'^{-1} = \frac{E+E_0}{\eta}$

2

3/ réponse à une sollicitation $\sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t$

on aura : $\varepsilon(t) = \int_0^t f'(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau$

transformée de carson : $\tilde{\varepsilon}(p) = \tilde{f}(p)\cdot\tilde{\sigma}(p)$ $\quad\Big|\ \sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t \Rightarrow \tilde{\sigma}(p) = \frac{\dot{\sigma}_0}{p}$

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \frac{\dot{\sigma}_0}{E_0}\cdot\frac{\eta/E}{1+\eta/E\,p} + \left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)\frac{\dot{\sigma}_0}{p(1+\frac{\eta}{E}p)}$$

$$= \frac{\dot{\sigma}_0}{E_0}\,\frac{\eta}{E}\cdot\frac{1}{1+\eta/E\,p} + \left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)\left[\frac{1}{p} - \frac{\eta}{E}\cdot\frac{1}{1+\eta/E\,p}\right]\dot{\sigma}_0$$

et donc : $\varepsilon(t) = \frac{\eta}{E E_0}\left(1-e^{-t/\tau}\right) + \left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)\left[t - \frac{\eta}{E}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]\dot{\sigma}_0$ $\quad\Big|\ \tau = \frac{E}{\eta}$

$$= \dot{\sigma}_0\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)t - \frac{\eta\dot{\sigma}_0}{E^2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

2

exercice 2 : $\boxed{3,5/6}$

4/ on impose une contrainte : $\sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t$. le patin frotte si $\sigma^v = S$. donc on peut dire que tant que $\sigma(t)$ est inférieur un certain seuil, le patin ne frotte pas. soit $t_s$ le temps au delà duquel le patin frotte.

$t < t_s$ : dans ce cas, on est amené au cas de l'exercice 1 :

i.e $\varepsilon(t) = \dot{\sigma}_0\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)t - \frac{\eta\dot{\sigma}_0}{E^2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

on a : $\sigma^v = \sigma - E\varepsilon_1 = \sigma - E\left(\varepsilon - \frac{1}{E_0}\sigma\right) = \sigma\left(1+\frac{E}{E_0}\right) - E\varepsilon$

$$\sigma^v = \dot{\sigma}_0 t\left(1+\frac{E}{E_0}\right) - E\left[\dot{\sigma}_0\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)t - \frac{\eta\dot{\sigma}_0}{E^2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]$$

$$\sigma^v = \frac{\eta\dot{\sigma}_0}{E}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

à $t = t_s$. on a : $\sigma^v = S$

et donc : $S = \frac{\eta\dot{\sigma}_0}{E}\left(1-e^{-t_s/\tau}\right) \Rightarrow t_s = -\tau\ln\left[1-\frac{ES}{\eta\dot{\sigma}_0}\right]$

$\underline{t > t_s}$ : on a : $\sigma^v = s$ et l'éq. diff devient :

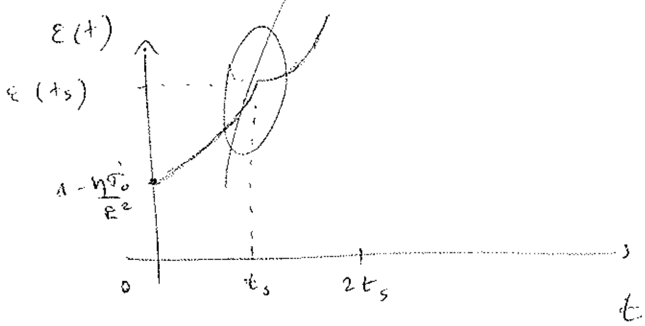
$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_0}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}(\sigma - s) \Leftrightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\eta}s = \frac{1}{E_0}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma$$

$$\sigma = \dot{\sigma}_0 t \Rightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\eta}s = \frac{1}{E_0}\dot{\sigma}_0 + \frac{\dot{\sigma}_0 t}{\eta}$$

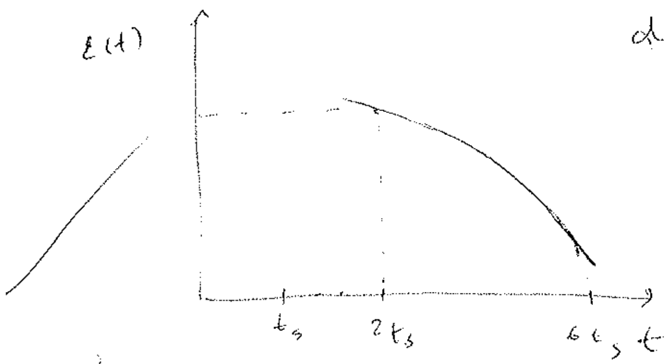
$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E_0}\dot{\sigma}_0 - \frac{1}{\eta}s\right) + \frac{\dot{\sigma}_0}{\eta}t$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E_0}\dot{\sigma}_0 - \frac{1}{\eta}s\right)t + \frac{\dot{\sigma}_0}{2\eta}t^2 + cte$$

on détermine cte en écrivant que $\varepsilon(t_s) = \dot{\sigma}_0\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E_0}\right)t_s - \frac{\eta\dot{\sigma}_0}{E^2}(1-e^{-t}$




5/




dans ce cas :
$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\dot{\sigma}_0}{E_0} - \frac{1}{\eta}s\right)t - \frac{\dot{\sigma}_0}{2\eta}t^2 + cte_2$$

$\underline{\text{exercice 3}}$ : 7

6/ Contrainte $\underline{\text{dans}}$ l'acier :

en supposant qu'il n'y a pas de frottement entre l'acier et le béton

$$\varepsilon_{jauge} = \varepsilon_{acier} = \frac{\sigma_{acier}}{E_a}$$

bien

$$\Rightarrow \sigma_{acier} = E_a \varepsilon$$

A.N : $\sigma_{acier} = 21$ MPa

2

$\underline{\text{force } F_p}$ : $F_p = (\pi r^2) \cdot \sigma_{acier}$

A.N $F_p = 6,6$ KN

2

contrainte dans le béton :

$$\sigma_b = \frac{F_p}{h\, e}$$

A.N : $\sigma_b = 66\ kPa$ 2

7/ ici on considère un essai de relaxation : on applique une déformation constante $\varepsilon_0$, et on suit l'évolution de la contrainte.

on a : $\tilde{\sigma}(p) = \tilde{r}(p) \times \tilde{\dot{\varepsilon}}(p)$

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \Rightarrow \tilde{\dot{\varepsilon}}(p) = \varepsilon_0$

1

et donc : $\tilde{\sigma}(p) = \varepsilon_0\, \tilde{r}(p) \Rightarrow \sigma(t) = \varepsilon_0\, r(t)$

on détermine le temps $t_b$ tq : $\dfrac{\sigma(t_b)}{\sigma(0)} = 0{,}8$

ie le temps $t_b$ tq : $\dfrac{r(t_b)}{r(0)} = 0{,}8$

on a : $r(t) = \dfrac{E E_0}{E + E_0}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right) + E_0\, e^{-t/\tau'}$ $\quad \tau' = \dfrac{E + E_0}{\eta}$

dans ce cas : $E = E_b/2$ $\quad E_0 = E_b$ $\quad , \tau' = \dfrac{2\eta}{3E_b} = \dfrac{\tau}{3}$

$$r(t) = \frac{E_b}{3}\left(1 - e^{-3/\tau\, t}\right) + E_b\, e^{-3/\tau\, t} \qquad \text{et } r(0) = E_b$$

$$\frac{r(t_b)}{r(0)} = 0{,}8 \iff \frac{E_b}{3}\left(1 - e^{-3/\tau\, t_b}\right) + E_b\, e^{-3/\tau\, t_b} = 0{,}8\, E_b$$

$$\iff e^{-3/\tau\, t_b} = 3/2\left(0{,}8 - 1/2\right)$$

$$\iff t_b = -\frac{\tau}{3} \times \ln(0{,}45)$$

A.N : $t_b = 2{,}66$ années

8/ à $t = +\infty$

on a : $\sigma(\infty) = \frac{1}{3}\varepsilon_0$ $\quad$ (car : $\lim_{t \to +\infty} \sigma(t) = 1/3$)

avec : $\varepsilon_0 = \dfrac{F_p}{h \cdot e \cdot E_b}$

on veut que : $\sigma(\infty) \geq 0{,}8\, \sigma_{b0}$ $\quad$ avec $\sigma_{b0} = 66\ kPa$

d'où : $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{F_p}{h e E_b} \geq 0{,}8 \times 66$ $\quad$ ie : $F_p \geq 3 h \cdot e \times 0{,}8 \times 66$

A.N : $F_p \geq 15{,}84\ kN$