TEST DE CALCUL SCIENTIFIQUE

Vendredi 16 mai 2014 : durée 2 heures

Les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés. Tout résultat non démontré ne sera pas pris en compte lors de la correction.

EXERCICE I (Méthode itérative)

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^4(U)$ admettant un zéro simple noté x^* appartenant à U. Dans le but de calculer x^* par approximations successives, on considère la méthode itérative associée à la fonction d'itération F définie par la formule :

$$\left\{\begin{array}{l} y(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \\ F(x) = y(x) - \dfrac{[y(x) - x]\, f\left(y(x)\right)}{2f\left(y(x)\right) - f(x)} \end{array}\right. \tag{1}$$

(1pt) 1. Préciser, en justifiant votre réponse, le type de cette méthode itérative.

(2pt) 2. Afin de simplifier les notations on pose

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(x^*)}{f'(x^*)} \qquad \text{pour} \qquad k \in [\![2, 4]\!]$$

Démontrer que

$$\frac{f(x^* + h)}{f'(x^* + h)} = h - c_2 h^2 + Ah^3 + Bh^4 + o(h^4) \tag{2}$$

Exprimer A en fonction de c_2 et c_3.

(2pt) 3. Déterminer le développement limité de $f\left(y(x^* + h)\right)$ à l'ordre 4 en h en fonction de x^*, $f'(x^*)$, c_2, A et B.

(1pt) 4. Déterminer le développement limité de $2f\left(y(x^* + h)\right) - f(x^* + h)$ à l'ordre 4 en h en fonction de x^*, $f'(x^*)$, c_2, c_3, c_4, A et B.

(4pt) 5. Déterminer le développement limité du quotient

$$\frac{[y(x^* + h) - (x^* + h)]\, f\left(y(x^* + h)\right)}{2f\left(y(x^* + h)\right) - f(x^* + h)}$$

à l'ordre 4 en h en fonction de x^*, c_2, c_3, A et B.

(1pt) 6. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en h de $F(x^* + h)$ en fonction de x^*, c_2 et c_3. Pourquoi cette méthode itérative est-elle convergente ?

(2pt) 7. A quelle condition, portant sur $f'(x^*)$, $f''(x^*)$ et $f'''(x^*)$, cette méthode est-elle d'ordre 4 ? Déterminer dans ce cas l'indice d'efficacité de cette méthode. On dit qu'une méthode itérative sans mémoire, qui nécessite σ évaluations de fonctions par itération, est optimale si son ordre de convergence est $\varrho = 2^{\sigma - 1}$. La méthode étudiée dans cet exercice est-elle optimale ?

EXERCICE II (Schéma numérique)

Considérons x_0 et X deux nombres réels tels que $x_0 < X$ et $f : [x_0, X] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application suffisamment régulière et L-lipschitzienne par rapport à son second argument. Pour tout y_0 dans $\mathbb{R}$ on veut déterminer une approximation numérique de l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

et à cette fin, on utilise une subdivision $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_N = X$ de l'intervalle $[x_0, X]$, de pas variable $h_n = x_{n+1} - x_n$ et on note z_n l'approximation numérique de $y(x_n)$.

(1pt) 1. Soient α, β, γ trois nombres réels et u une application polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 définie sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. Déterminer le système que doivent vérifier α, β et γ pour que

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \alpha\, u(0) + \beta\, u(\gamma)$$

(0,5pt) 2. Montrer que ce système admet l'unique solution $\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\beta = \dfrac{3}{4}$ et $\gamma = \dfrac{2}{3}$

(1pt) 3. Lorsque g est une fonction non polynômiale continue et définie sur $[0, 1]$, on utilise alors l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \simeq \frac{1}{4}\,g(0) + \frac{3}{4}\,g\left(\frac{2}{3}\right) \tag{4}$$

En déduire que si y est l'unique solution de (3), elle vérifie l'approximation

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + h_n \left[\frac{1}{4} f\left(x_n, y(x_n)\right) + \frac{3}{4} f\left(x_n + \frac{2}{3}h_n, y(x_n + \frac{2}{3}h_n)\right)\right] \tag{5}$$

(1pt) 4. Quelle approximation de $y(x_n + \frac{2}{3}h_n)$ faut-il utiliser en plus de (5) pour obtenir naturellement le schéma numérique

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{R} \\ z_{n+1} = z_n + h_n\, \Phi(x_n, z_n, h_n) \qquad n \in [\![0, N-1]\!] \end{cases} \tag{6}$$

associé à la fonction Φ définie par

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{4} f(x, y) + \frac{3}{4} f\left(x + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3} h f(x, y)\right) \tag{7}$$

(1pt) 5. Démontrer que ce schéma est convergent.

(1pt) 6. Démontrer que ce schéma est au moins d'ordre 2.

(1,5pt) 7. Démontrer en utilisant un exemple simple qu'il n'est pas, en général, d'ordre 3.

(Bonus 2pt) 8. Montrer que cette méthode est de type Runge-Kutta à deux étages en donnant son tableau de Butcher.