

# PROJET MODELISATION



ENTPE  
Damien LEROY Alexandre LIBEAU Martin ROBILLIARD

## Table des matières

- I- Introduction
  - A- Présentation du projet
  - B- Etude du problème
- II- Modélisation par la méthode des différences finies
  - A- Hypothèses retenues
  - B- Application de la méthode des différences finies
- III- Modélisation par la méthode des éléments finis
  - A- Mode de construction et conditions aux limites
  - B- Résultats

# I- INTRODUCTION

## A- Présentation du projet

Le but du projet qui nous a été proposé est de modéliser l'équilibre thermomécanique d'une pièce en fonte. Nous souhaitons calculer les champs de déplacements, de température, de déformations et de contraintes. Pour cela nous avons utilisé deux méthodes particulières : la Méthode des éléments finis mise en application grâce au logiciel RDM6 et la Méthode des différences finies mise en application avec le logiciel MATLAB. Nous allons donc dans ce rapport vous présenter l'application de ces deux méthodes, les hypothèses qui ont été faites lors de la réalisation des programmes et l'utilisation des logiciels, les résultats et une analyse de ceux-ci.

## B- Etude du problème

Cette pièce en fonte a la particularité d'avoir un axe de révolution selon Oz, ce qui permet de se restreindre à une étude en 2D. Le creux de la pièce est chauffé à 250°C et les contours sont maintenues à 25°C ce qui va induire un champ de température au sein de la pièce. Ce champ de température va provoquer un champ de déplacement thermique, en même temps qu'un champ de contrainte. Or cette pièce étant encastree au niveau de sa base et de sa paroi latérale, les déplacements sont limités, ce qui va provoquer une déformation mécanique au sein de la pièce.

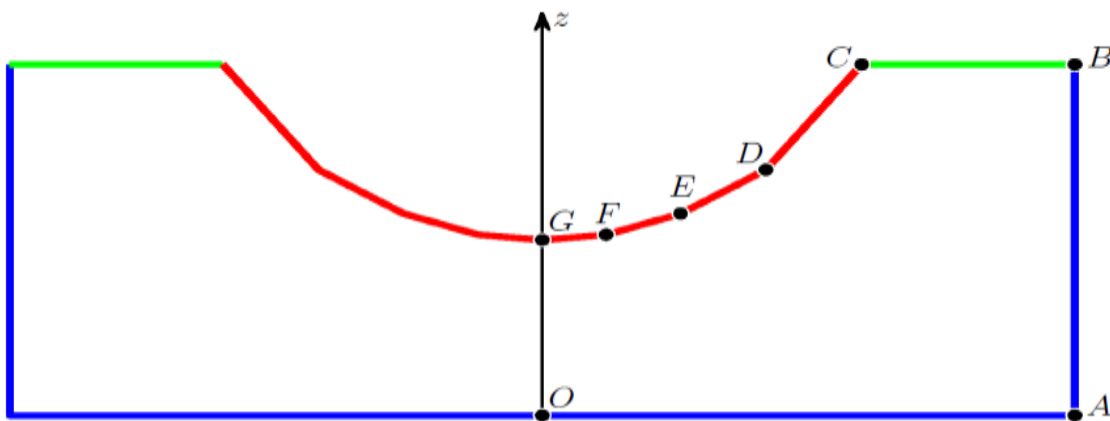


Figure 1- Sollicitation thermomécanique d'une pièce en fonte

En bleu : partie encastree (vitesses verticale et horizontale nulle) maintenue à 25°C

En rouge : partie libre maintenue à 250°C

En vert : partie libre en contact avec l'air à 25°C

## II- Modélisation par la méthode des différences finies

Avec cette méthode nous avons modélisé le champ thermique.

### A- Hypothèses retenues

- Nous avons utilisé des coordonnées cylindriques en 2 dimensions, connaissant la symétrie du problème.
- Nous avons considéré que l'air était une source thermique infinie et donc un thermostat parfait à la température de 25°C. Cette hypothèse est recevable si l'on considère qu'il y a un renouvellement d'air constant au-dessus de la pièce.
- Nous avons considéré que le creux était formé par un cercle dont nous avons trouvé le centre à partir des coordonnées des points donnés dans l'énoncé.

### B- Application de la méthode des différences finies

Pour cette méthode nous avons utilisé le logiciel MATLAB.

Nous avons modélisé la pièce avec une matrice de  $200 \times 500$  éléments. Après avoir discrétisé l'équation de la chaleur, et introduit un grand nombre d'itération nous avons via 2 boucles for parcouru la totalité des éléments de la matrice, en appliquant la formule des différences finies :

Equation de la chaleur en cylindrique 2D en régime stationnaire :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Discrétisation grâce à la formule de Taylor (on néglige le terme en  $o(h^2)$ ):

$$\frac{T(r+1)+T(r-1)-2T(r,z)}{\Delta r^2} + \frac{T(z+1)+T(z-1)-2T(r,z)}{\Delta z^2} + \frac{1}{r} \frac{T(r+1)-T(r-1)}{2\Delta r} = 0$$

Or ici pour simplifier les calculs on prend  $\Delta r, \Delta z^2, \Delta r^2$  égaux à 1. Ainsi on la formule suivante :

$$T(r, z) = \frac{T(r+1) + T(r-1) + T(z+1) + T(z-1)}{4} + \frac{T(r+1) - T(r-1)}{8r}$$

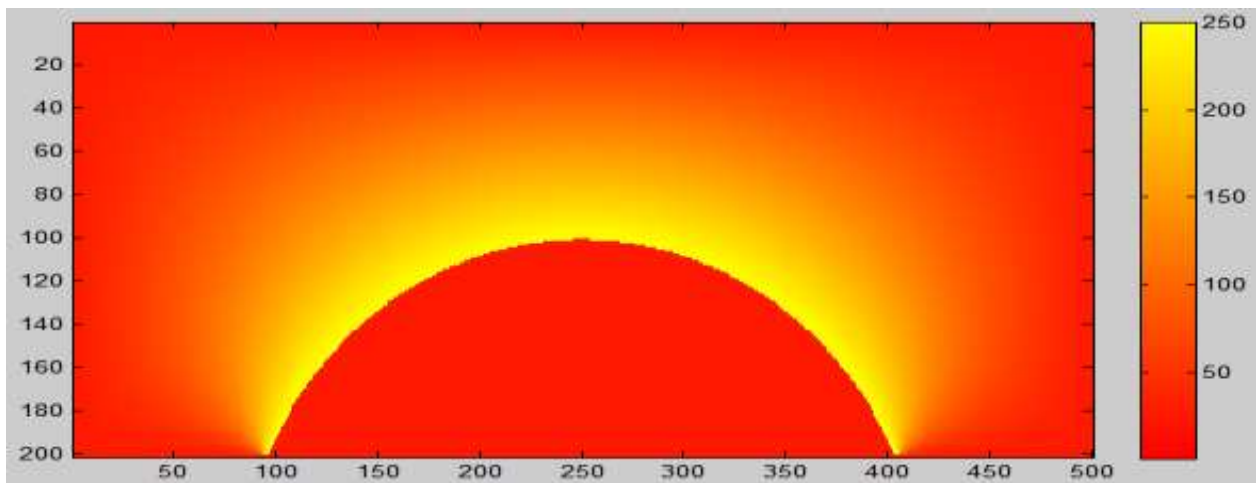


Figure 2-MATLAB champ thermique

### III- Modélisation par la méthode des éléments finis

Pour cette méthode nous avons utilisé le logiciel RDM6.

#### A- Mode de construction et conditions aux limites

Pour simplifier le problème au maximum et dans la logique du fonctionnement du logiciel RDM6, nous avons modélisé la pièce comme suit :

- Connaissant la symétrie de révolution d'axe Oz nous avons réduit le problème à 2 dimensions
- Puis sachant la symétrie d'axe Oz nous avons pu garder que la partie de coordonnées r positives

Nous avons donc tout d'abord dessiné la pièce en plaçant les points de coordonnées positives donnés dans le sujet. Puis nous avons sélectionné la fonction « Modélisation » puis « Maillage ». Nous avons décidé de réaliser un maillage plus fin que ce que le logiciel nous proposait à la base. Nous avons ainsi obtenue la figure 3.

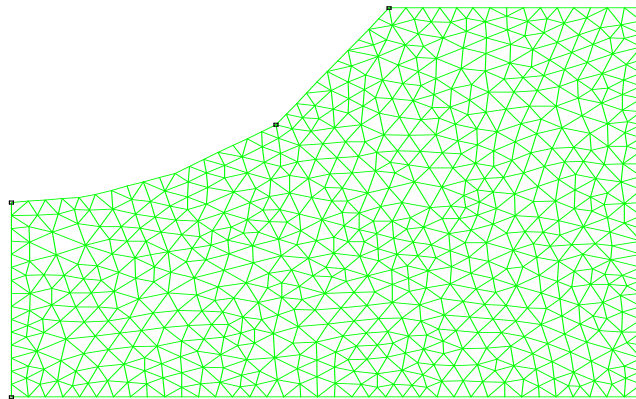


Figure 3- Maillage de la pièce de fonte

Ensuite après avoir précisé qu'il s'agissait d'une pièce en fonte nous avons appliqué les conditions aux limites grâce aux différentes fonctions proposées par le logiciel:

- « Source de chaleur » à la température de 250°C dans le creux
- « Source de chaleur » à la température de 25°C à la base et sur le coté latéral gauche
- « Gradient de température » d'une valeur de 25°C
- Base et coté latéral gauche encastres (soit vitesse  $\vec{u}=0$ ) grâce à un « pivot » (figure 4 : points rouges)
- « Convection » de l'air au repos avec un coefficient de convection pris égal à 15 W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup>
- « Force de pesanteur »

Ensuite le logiciel a appliqué la méthode des éléments finis à la pièce en fonte. En effet la 1<sup>ère</sup> étape de celle-ci est de réaliser un maillage ou encore une triangulation (figure 3). Chaque élément triangulaire verra ses caractéristiques comme les déplacements par exemple rapporté à ses 3 nœuds. Pour cela nous allons créer une table des nœuds qui contiendra les coordonnées de ceux-ci et une 2<sup>ème</sup> table qui cette fois ci associera à chaque élément les 3 nœuds correspondants, dans le sens trigonométrique.

Après avoir défini tout cela nous devons définir plusieurs matrices qui permettront la résolution du problème. La première de ces matrices est la matrice d'interpolation. Cette matrice est composée

des fonctions d'interpolation correspondant à chaque nœud. Ces fonctions sont définies de telle manière à avoir  $u(r, z) = M(r, z) u$ , où  $u$  regroupe les composantes des déplacements des nœuds de l'éléments et  $M$  la fonction d'interpolation. L'expression de ces fonctions pour un élément se trouve avec les coordonnées des nœuds de cet élément. Ensuite, pour chaque élément il faut trouver deux matrices  $K$  et  $F$  qui permettront la résolution numérique. Ici  $K$  pour un élément « e » sera donné par la formule suivante :  $K_e = \int_e B^t D B$  avec  $D$  la matrice telle que  $\bar{\sigma} = D \bar{\epsilon}$  et  $B$  la matrice telle que  $\bar{\epsilon} = B V$  avec  $V$  le vecteur des composantes  $u$  des nœuds de ce même éléments.  $F_e$ , pour un élément, est trouvée à partir des actions mécaniques extérieures ( $K$  correspond à la partie actions mécaniques intérieurs et  $F$  à la partie actions mécaniques extérieurs du Théorème des travaux virtuels).

Pour finir il faut résoudre l'équation  $K U=F$  où  $U$  correspond au vecteur déplacement total. On trouve ainsi le champ de déplacement, puis celui de déformation grâce à la matrice  $B$  et enfin celui des contraintes grâce à la matrice  $D$ .

## B- Résultats

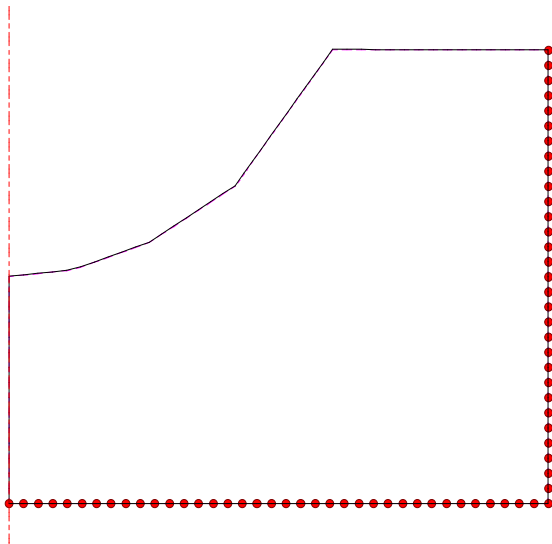


Figure 4-déplacement à l'échelle 1

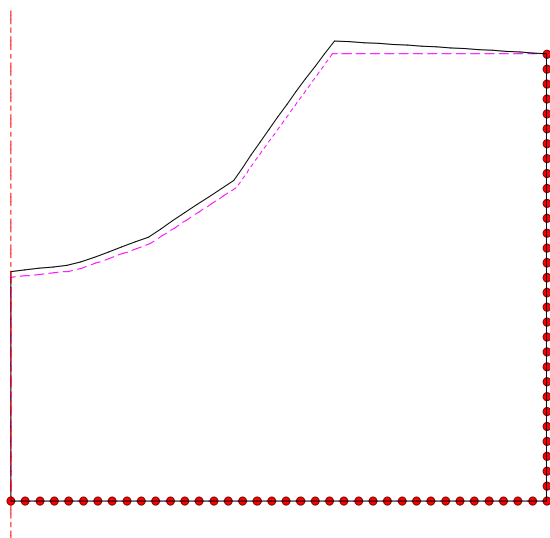


Figure 5-déplacement accentué

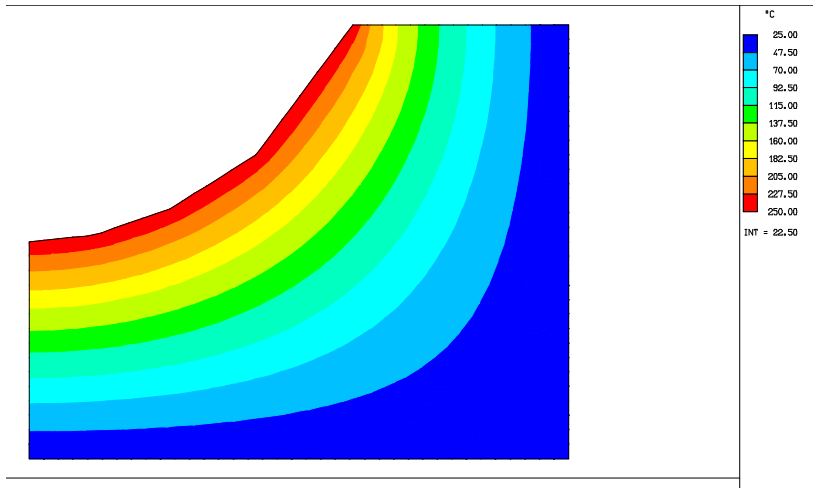


Figure 6-champ de température

### C- Analyse des résultats

On obtient les résultats suivant pour les contraintes :

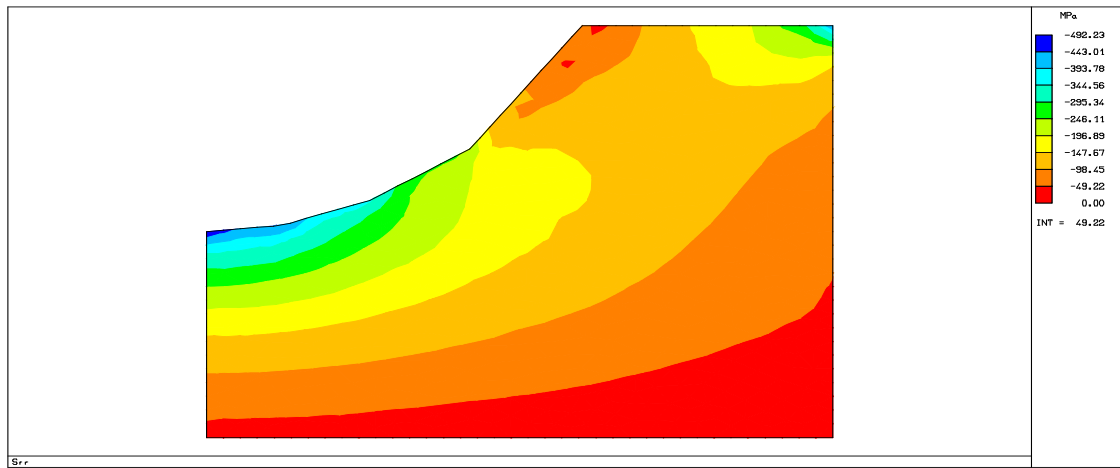


Figure 7-contrainte  $r_r$

On remarque que les contraintes  $r_r$  sont toutes négatives. Ce qui peut s'expliquer du fait de la dilatation due à la déformation thermique mais aussi à cause de l'encastrement qui limite les déplacements dans le sens positif d'où les contraintes  $r_r$  négatives.

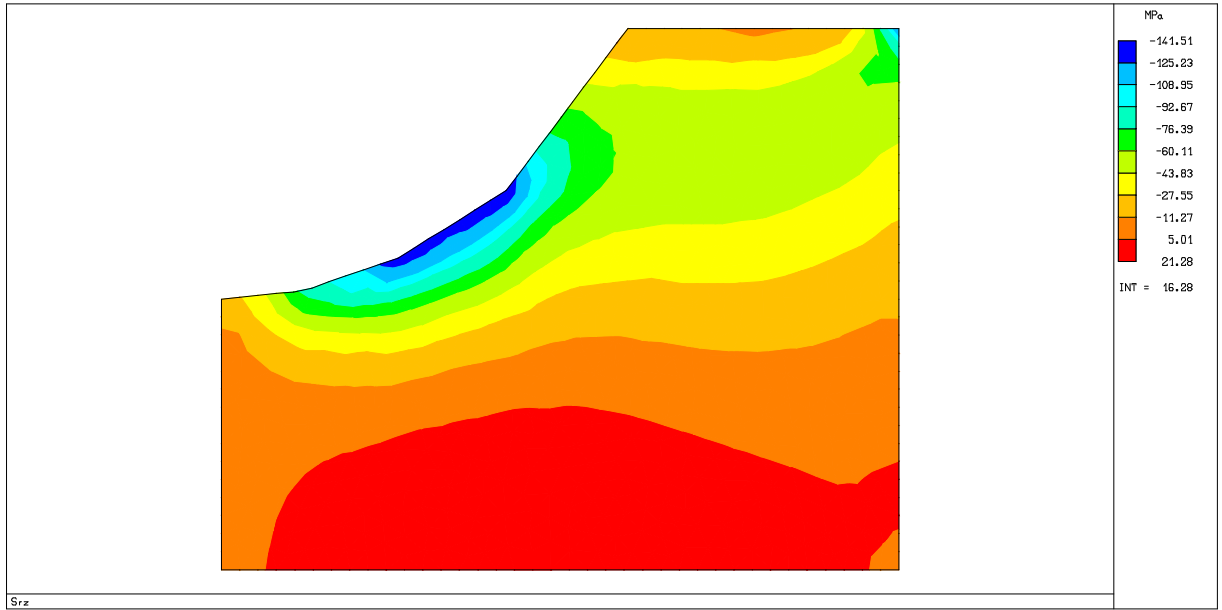


Figure 8-contrainte rz

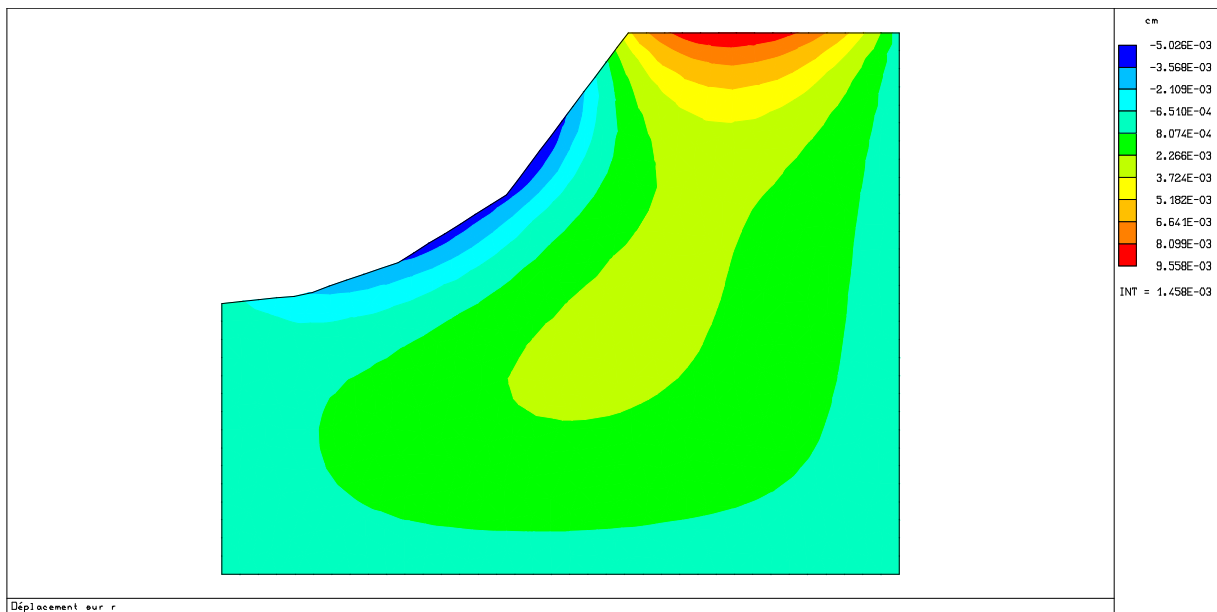


Figure 9-contrainte zz



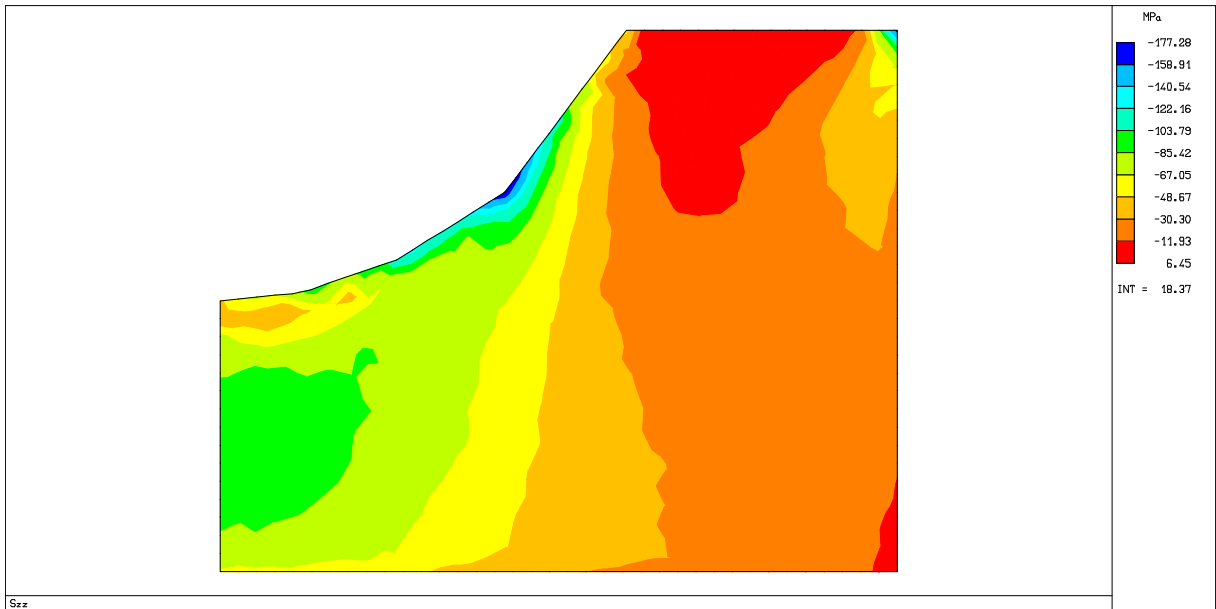


Figure 10-déplacement r

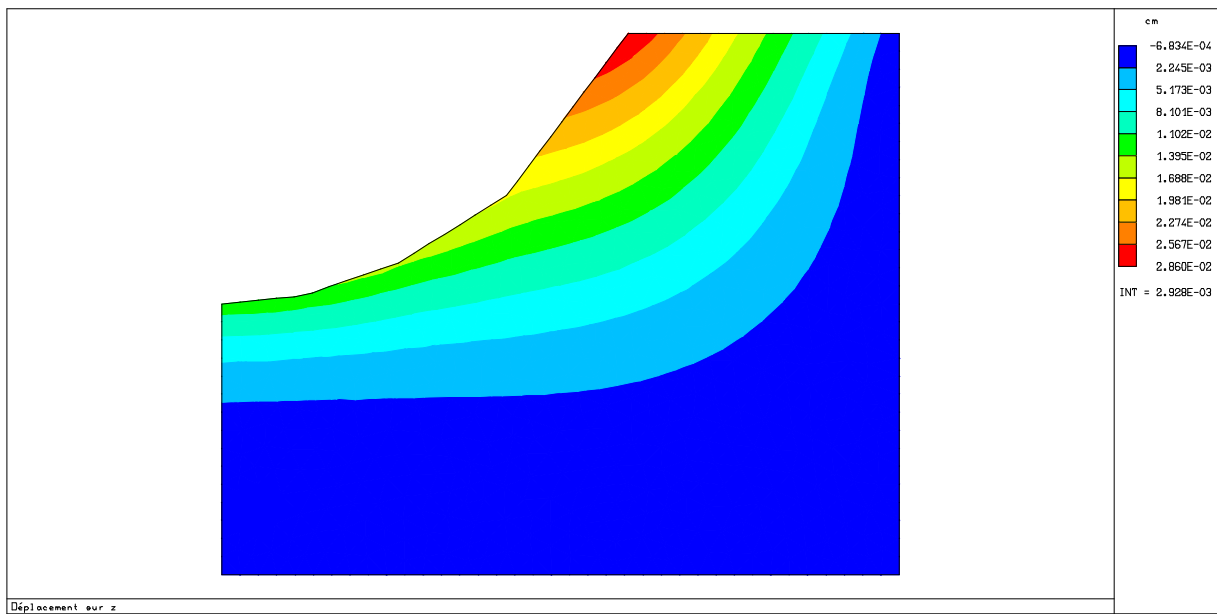


Figure 11-déplacement z