

COURS DE STRUCTURES - ÉTUDE DE CAS

Morane Le Gallic, Robin Michel, Lucile Peyrou, Jean-Marie Roussel

Décembre 2015

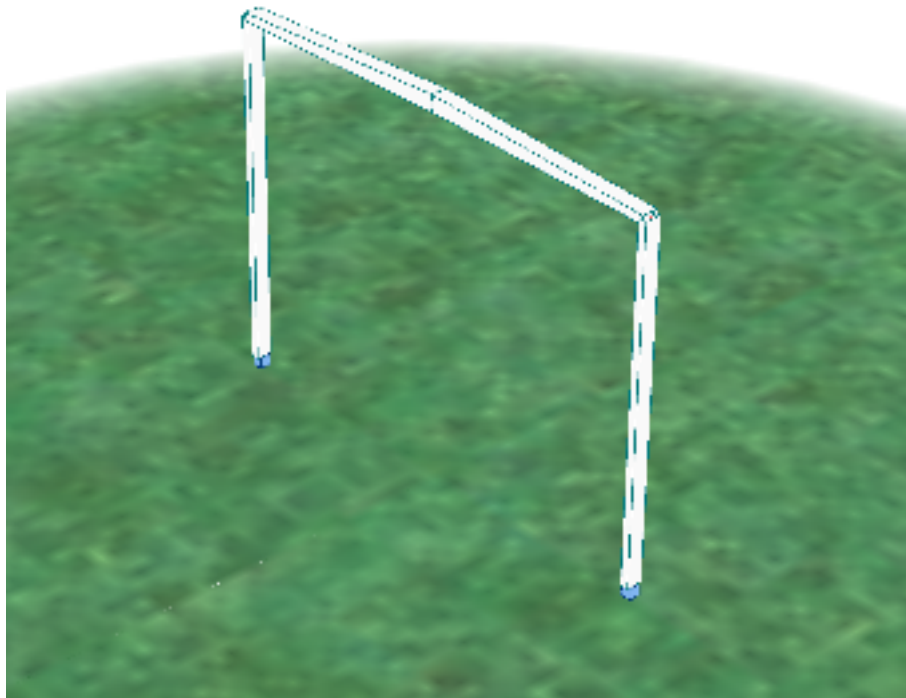


Table des matières

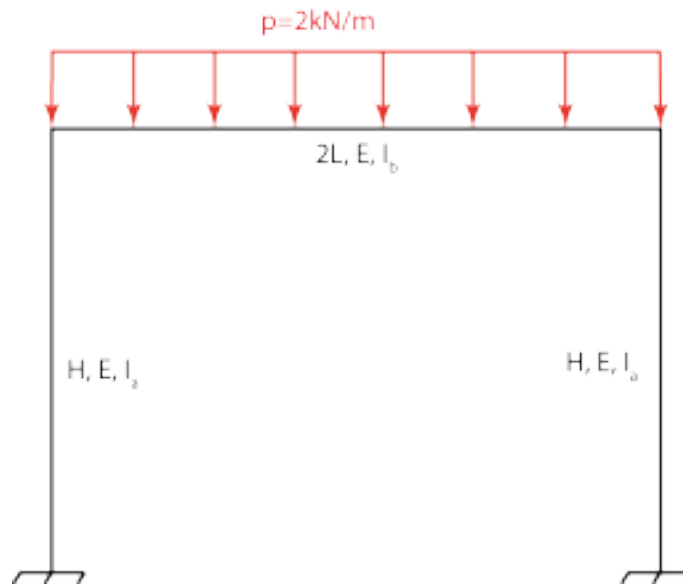
I. Mise en oeuvre de la méthode des rotations	3
1. Calcul des inerties	3
2. Equilibres des noeuds	4
3. Application du principe des travaux virtuels	4
4. Résolution du système	4
II. Mise en oeuvre de la méthode des forces	6
1. Calcul des inerties	6
2. Calcul des moments sur les structures unitaires	7
3. Mise en équation	10
III. Calcul des sollicitations par ordinateur	12
1. Modélisation de la structure et chargement	12
2. Sollicitations en moment, effort tranchant et effort normal	12
3. Comparaison avec les méthodes manuelles	13

Introduction

L'objectif de ce projet est de déterminer les sollicitations dans un portique soumis à une charge répartie constante. Les calculs se feront de trois façons différentes, dont une grâce à un logiciel de calcul. Enfin, on comparera les différentes méthodes et on jugera de la pertinence des hypothèses.

I. Mise en oeuvre de la méthode des rotations

On choisit de déterminer les sollicitations en considérant que la section de la poutre supérieurs est constante, son inertie correspond à la valeur moyenne de l'inertie de la poutre à section constante.



1. Calcul des inerties

Inertie des poteaux

Pour une section rectangulaire, l'inertie selon z vaut :

$$I_a = \frac{a \left(\frac{a}{2}\right)^3}{12}$$

$$I_a = 1,70 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Inertie de la poutre à section variable

L'inertie vaut :

$$I_b(x) = \frac{a(H(x))^3}{12}$$

Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\forall x \in [0, L], H(x) = \frac{ax}{2L} + \frac{a}{2}$$

On choisi de prendre une inertie moyenne sur la demi-longueur de la poutre :

$$I_b = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{a}{12} \left(\frac{ax}{2L} + \frac{a}{2} \right)^3 dx = \frac{5a^4}{128}$$

$$I_b = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

2. Equilibres des noeuds

Par géométrie, on a : $\Omega_{12} = \Omega_{21} = \Omega_{43} = \Omega_{34} = -\frac{U}{H}$

Equilibre au noeud 2

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{21} = \omega_2 \cdot \frac{4EI_a}{H} + \frac{U}{H} \cdot \frac{6EI_a}{H}$$

$$M_{23} = \omega_2 \cdot \frac{4EI_b}{2L} + \omega_3 \cdot \frac{2EI_b}{2L} + \frac{p(2L)^2}{12}$$

$$\omega_2 \cdot \left(\frac{4EI_a}{H} + \frac{4EI_b}{2L} \right) + \omega_3 \cdot \frac{EI_b}{L} + U \cdot \frac{6EI_a}{H^2} = -\frac{p(2L)^2}{12}$$

Equilibre au noeud 3

$$M_{32} + M_{34} = 0$$

$$M_{32} = \omega_3 \cdot \frac{4EI_b}{2L} + \omega_2 \cdot \frac{2EI_b}{2L} - \frac{p(2L)^2}{12}$$

$$M_{34} = \omega_3 \cdot \frac{4EI_a}{H} + \frac{U}{H} \cdot \frac{6EI_a}{H}$$

$$\omega_3 \cdot \left(\frac{4EI_b}{2L} + \frac{4EI_a}{H} \right) + \omega_2 \cdot \frac{EI_b}{L} + U \cdot \frac{6EI_a}{H^2} = \frac{p(2L)^2}{12}$$

3. Application du principe des travaux virtuels

Le travail des forces est nul car ces dernières sont orthogonales au déplacement.

Il reste le travail des moments :

$$\frac{U}{H} (M_{21} + M_{12} + M_{34} + M_{43}) = 0$$

$$M_{12} = \omega_3 \cdot \frac{4EI_a}{H} + \frac{U}{H} \cdot \frac{6EI_a}{H}$$

$$M_{43} = \omega_4 \cdot \frac{4EI_a}{H} + \frac{U}{H} \cdot \frac{6EI_a}{H}$$

$$\omega_2 \cdot \frac{6EI_a}{H} + \omega_3 \cdot \frac{6EI_a}{H} + U \cdot \frac{24EI_a}{H^2} = 0$$

4. Résolution du système

Mise sous forme matricielle :

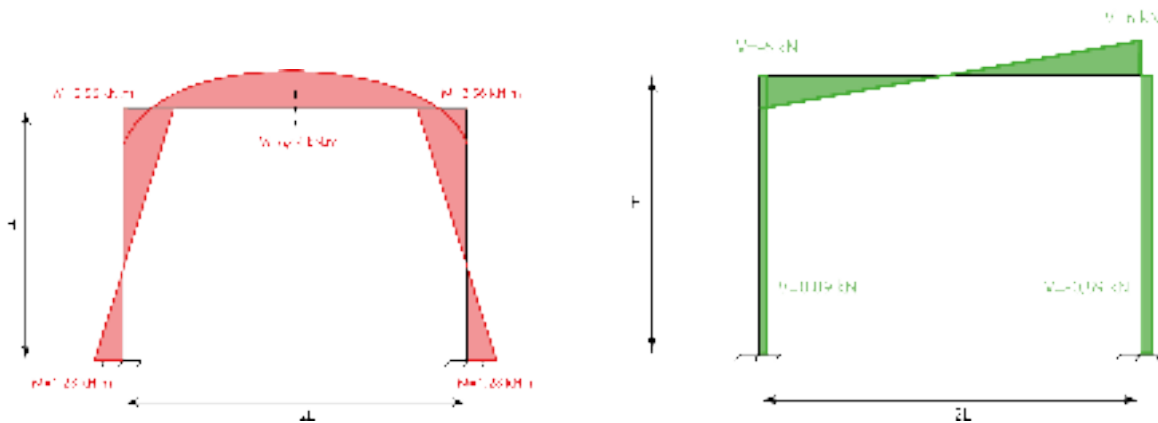
$$\begin{pmatrix} 4E \left(\frac{I_b}{2L} + \frac{I_a}{H} \right) & \frac{EI_b}{L} & \frac{6EI_a}{H^2} \\ \frac{EI_b}{L} & 4E \left(\frac{I_b}{2L} + \frac{I_a}{H} \right) & \frac{6EI_a}{H^2} \\ \frac{6EI_a}{H} & \frac{6EI_a}{H} & \frac{24EI_a}{H^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p(2L)^2}{12} \\ \frac{p(2L)^2}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution numérique :

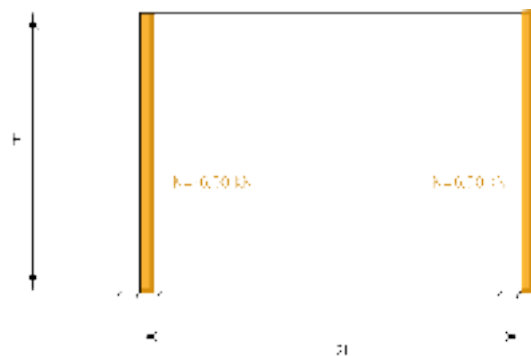
$$\begin{cases} \omega_2 = -4,72 \\ \omega_3 = 4,72 \\ U = 2 \cdot 10^{-13} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} M_1 = 1,28 \text{ kN.m} \\ M_2 = -2,56 \text{ kN.m} \\ M_3 = -2,56 \text{ kN.m} \\ M_4 = 1,28 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} M_{12}(x) = 1,28 - 0,89 \cdot x \\ M_{23}(x) = -x^2 - 6 \cdot x - 2,56 \\ M_{34}(x) = -0,89 \cdot x - 2,56 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_{12}(x) = 0,89 \\ V_{23}(x) = 2 \cdot x - 6 \\ V_{34}(x) = -0,89 \end{cases}$$

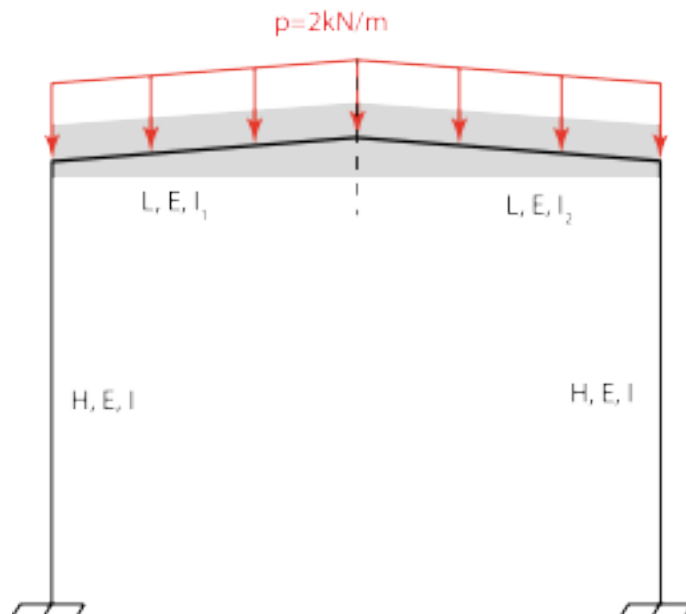


L'effort normal est constant dans les poteaux et vaut $\pm \frac{p(2L)}{2}$



II. Mise en oeuvre de la méthode des forces

La structure est hyperstatique de degré 3.



1. Calcul des inerties

L'inertie des poteaux est constante et vaut :

$$I = \frac{a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{12}$$

$$I = 1,70 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

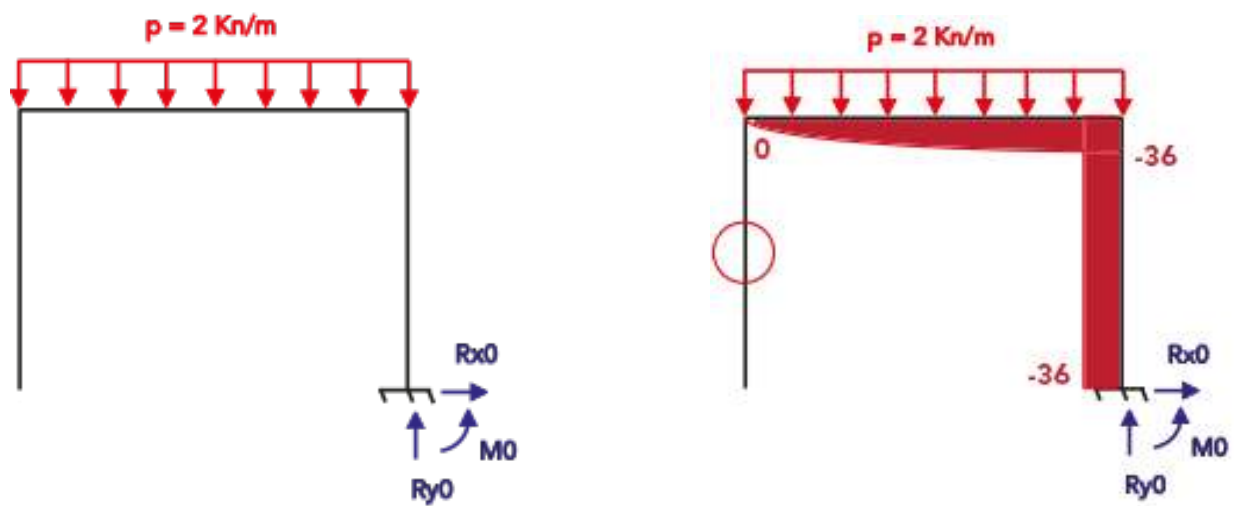
L'inertie de la partie gauche de la poutre vaut :

$$I_1(x) = \frac{a}{12} \left(\frac{a \cdot x}{6} + \frac{a}{2} \right)^3$$

L'inertie de la partie droite de la poutre vaut :

$$I_2(x) = \frac{a}{12} \left(\frac{a(2 \cdot 3 - x)}{6} + \frac{a}{2} \right)^3$$

2. Calcul des moments sur les structures unitaires

Structure S_0 

Actions de liaison

$$\begin{cases} R_{Y0} - 6 \cdot p = 0 \\ R_{X0} = 0 \\ M_0 + \frac{6 \cdot 6 \cdot p}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Y0} = 12 \text{ kN} \\ R_{X0} = 0 \\ M_0 = -36 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Coupure 1-2

$$M_0(x) = 0$$

Coupure 2-4

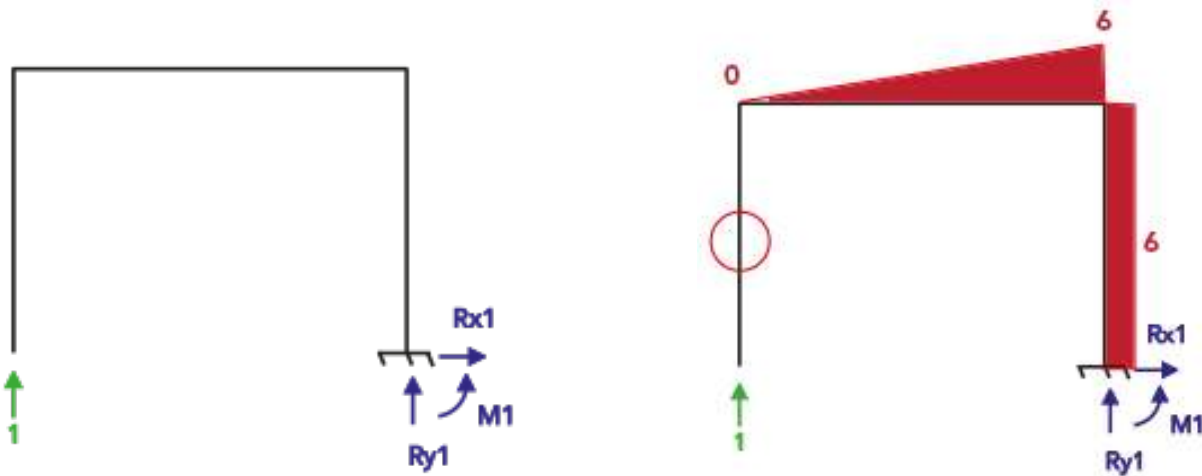
$$M_0(x) + p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M_0(x) = -\frac{p \cdot x^2}{2}$$

Coupure 4-5

$$-M_0(x) + R_{X0} \cdot x + M_0 = 0$$

$$M_0(x) = -36 \text{ kN.m}$$

Structure S_1 

Actions de liaison

$$\begin{cases} R_{Y1} + 1 = 0 \\ R_{X1} = 0 \\ M_1 - 1 \cdot 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Y1} = -1 \text{ kN} \\ R_{X1} = 0 \text{ kN} \\ M_1 = 6 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Coupure 1-2

$$M_1(x) = 0$$

Coupure 2-4

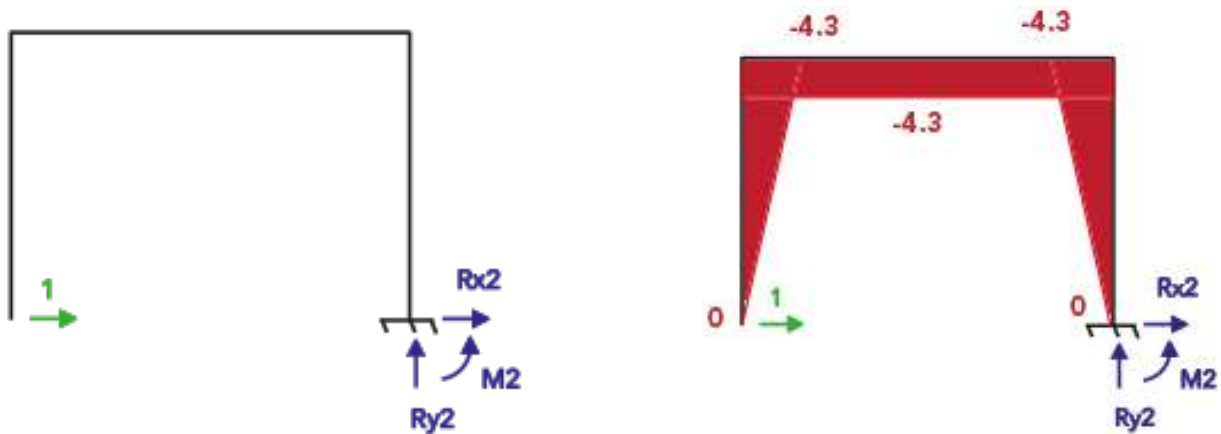
$$M_1(x) - x = 0$$

$$M_1(x) = x$$

Coupure 4-5

$$-M_1(x) + 0 + M_1 = 0$$

$$M_1(x) = 6 \text{ kN.m}$$

Structure S_2 

Actions de liaison

$$\begin{cases} R_{Y2} = 0 \\ R_{X2} + 1 = 0 \\ M_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Y2} = 0 \text{ kN} \\ R_{X2} = -1 \text{ kN} \\ M_2 = 0 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Coupure 1-2

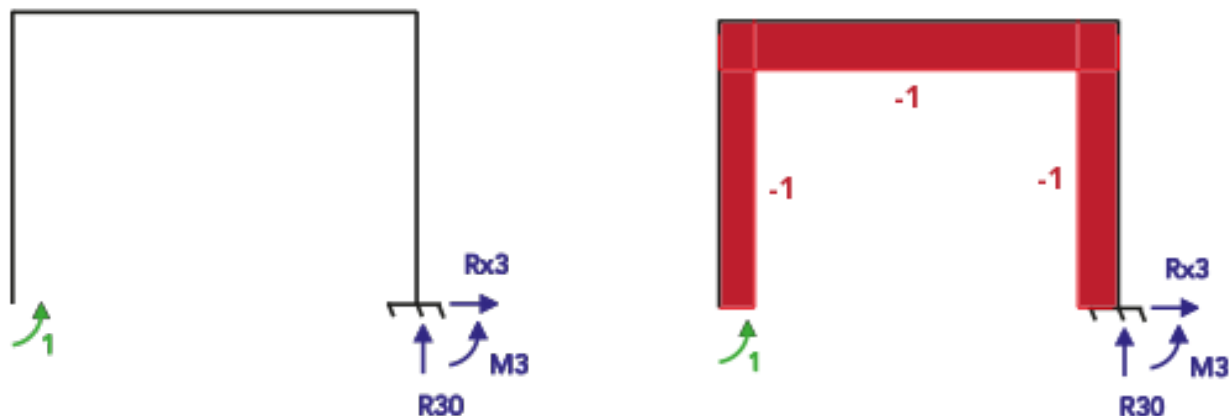
$$\begin{aligned} M_2(x) + x &= 0 \\ M_2(x) &= -x \end{aligned}$$

Coupure 2-4

$$\begin{aligned} M_2(x) + H &= 0 \\ M_2(x) &= H \end{aligned}$$

Coupure 4-5

$$\begin{aligned} -M_2(x) + R_{X2} \cdot x + M_2 &= 0 \\ M_2(x) &= -x \end{aligned}$$

Structure S_3 

Actions de liaison

$$\begin{cases} R_{Y3} - 6 \cdot p = 0 \\ R_{X3} = 0 \\ M_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Y3} = 0 \text{ kN} \\ R_{X3} = 0 \text{ kN} \\ M_3 = -1 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Coupure 1-2

$$\begin{aligned} M_3(x) + 1 &= 0 \\ M_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

Coupure 2-4

$$\begin{aligned} M_3(x) + 1 &= 0 \\ M_3(x) &= -1 \end{aligned}$$

Coupure 4-5

$$\begin{aligned} -M_3(x) + M_3 &= 0 \\ M_3(x) &= -1 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

3. Mise en équation

Forme matricielle du système :
$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \delta_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\forall i \in [0, 3], \forall j \in [1, 3], \delta_{ij} = \int_S \frac{M_i M_j}{EI}$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \delta_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,50 \cdot 10^7 \\ 2,79 \cdot 10^7 \\ 1,11 \cdot 10^7 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,11 \cdot 10^7 & -5,07 \cdot 10^6 & -1,95 \cdot 10^6 \\ -5,07 \cdot 10^6 & 5,68 \cdot 10^6 & 1,69 \cdot 10^6 \\ -1,95 \cdot 10^6 & 1,69 \cdot 10^6 & 6,51 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

On obtient :

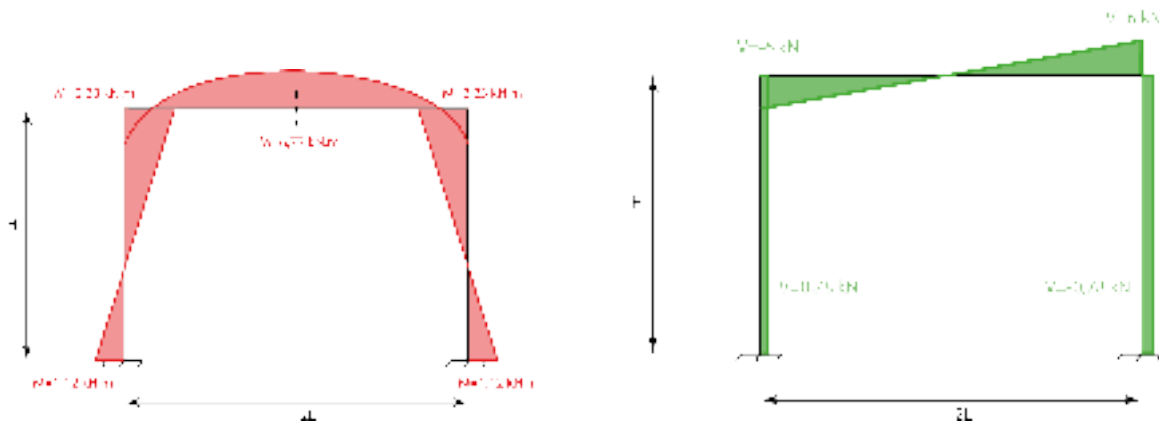
$$\begin{cases} X_1 = 6 \\ X_2 = 0,78 \\ X_3 = -1,12 \end{cases}$$

On peut alors obtenir :

$$M(x) = M_0 + X_1 \cdot M_1(x) + X_2 \cdot M_2(x) + X_3 \cdot M_3(x)$$

Finalement :

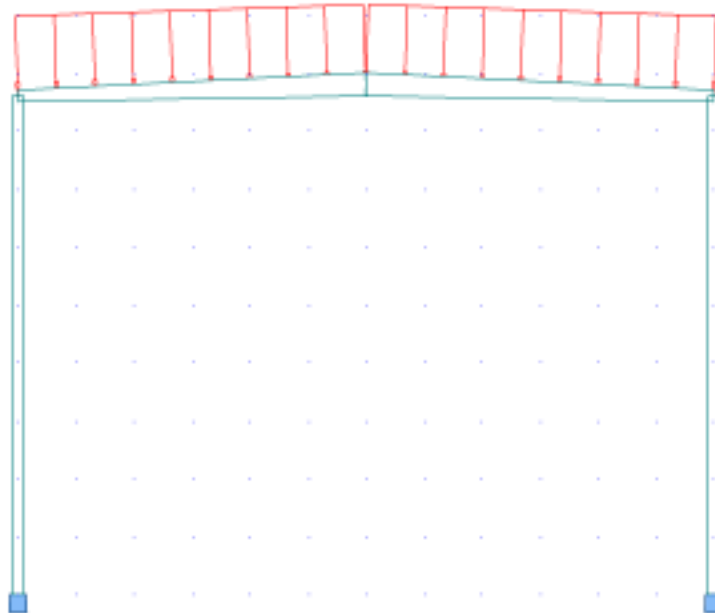
$$\begin{cases} M_{12} = -0,78 \cdot x + 1,12 \\ M_{24} = -x^2 + 6 \cdot x - 2,23 \\ M_{45} = 0,78x - 2,23 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_{12} = 0,78 \\ V_{24} = 2x - 6 \\ V_{45} = -0,78x \end{cases}$$



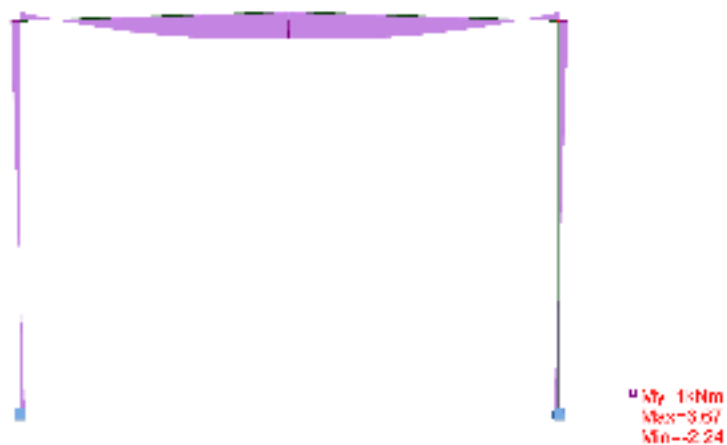
III. Calcul des sollicitations par ordinateur

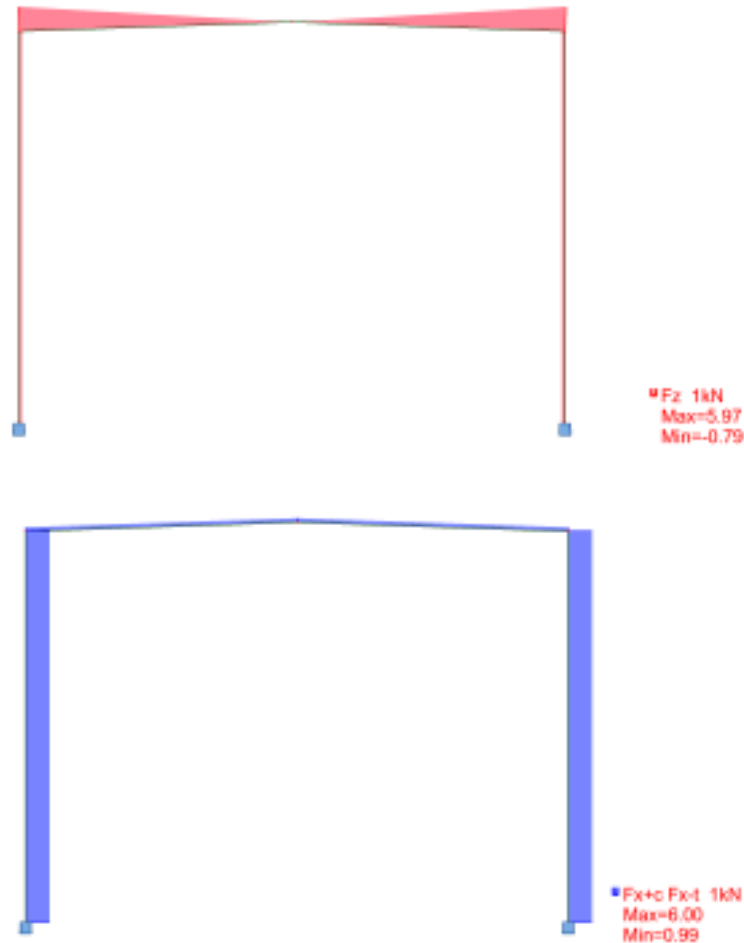
1. Modélisation de la structure et chargement

La structure est modélisée sous le logiciel Robot Structural Analysis, avec les sections exactes, sans approximations.



2. Sollicitations en moment, effort tranchant et effort normal





3. Comparaison avec les méthodes manuelles

Rappel des valeur obtenues

	Méthode des rotations	Méthode des forces	Robot
Moment maximal à mi-travée ($kN.m$)	6,44	6,77	6,67
Moment aux angles ($kN.m$)	-2,56	-2,23	-2,24
Effort tranchant dans la poutre supérieure (kN)	± 6	± 6	$\pm 5,97$
Effort tranchant dans les poteaux (kN)	$\pm 0,89$	$\pm 0,78$	$\pm 0,79$

Comparaison méthode des rotations

On remarque une quasi-similitude entre les résultats des simulations. La méthode des rotations donne un moment 3,5% inférieur au moment maximal réel. Hors d'après nos hypothèses, nous avons choisi une inertie moyenne. Pour obtenir des résultats plus proches de la réalité, il faut discrétiser la partie chargée plus finement si l'on veut calculer la valeur maximale du moment de flexion sur cet élément de structure. On obtiendrait ainsi une inertie différente en fonction de la position selon la position sur la poutre supérieure.

Comparaison méthode des forces

Une fois encore, on remarque une quasi-similitude entre les résultats des simulations. La méthode des forces donne un moment 1,4% supérieur au moment maximal réel. Cette erreur peut sûrement être expliquée par la géométrie choisie de la poutre supérieure, en effet la fibre moyenne de la poutre supérieure réelle est inclinée. Cette inclinaison permet de diminuer le moment maximum au centre de la poutre. Les écarts observés traduisent manifestement des "erreur de modélisation", nous avons donc réalisé une mauvaise représentation du portique réel. Il faudrait en effet prendre en compte la géométrie réelle de la structure. On peut cependant remarquer que les deux méthodes des forces et des rotations présentent simplement des résultats très proches de la réalité.

Conclusion

Malgré les approximations faites lors de l'exécution des méthodes manuelles, on constate que les écarts à la "réalité" sont relativement faibles. La méthode informatique est toutefois bien plus rapide, surtout pour des structures plus complexes.