Questions de cours

1. Rappeler, d'une phrase courte mais précise, les deux hypothèses de continuité qui fondent la mécanique des milieux continus.

   La première de ces deux hypothèses admet la continuité de la matière. Un volume élémentaire dv du corps matériel $\mathcal{M}$ est alors supposé totalement empli de matière.

   La seconde traduit quant à elle la continuité de la transformation. À chaque instant t, la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à cet instant est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω_0 sur Ω_t (régularité, à t fixé, par rapport aux variables d'espace (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3)). Par ailleurs, pour tout $\vec{X} \in \Omega_0$, les applications $t \mapsto \mathcal{F}(\vec{X}, t)$ ainsi que $t \mapsto \partial_K \mathcal{F}(\vec{X}, t)$, $K \in \{1, 2, 3\}$, sont continues (régularité, pour $\vec{X}$ donné cette fois, par rapport à la variable temps t).

2. Quelle signification physique ont les parties isotrope et déviatorique du tenseur linéarisé des petites déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$?

   À la partie isotrope correspond un changement de volume sans changement de forme, tandis qu'à la partie déviatorique est associé un changement de forme sans changement de volume.

Premier exercice : Transformation linéaire plane

Un solide déformable est soumis à une transformation linéaire plane donnée, dans le repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 - X_2 \\ x_2 & = & X_1 + X_2 \end{array} \right.$$

où (X_1, X_2) désignent les coordonnées initiales d'une particule donnée, et (x_1, x_2) les coordonnées de cette même particule dans la configuration déformée.

1. Donnez l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$, puis celles des tenseurs de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$.

   L'on a

   $$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{F}.\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer les valeurs de la dilatation volumique θ_V et de la masse volumique ρ, en supposant cette dernière uniforme et égale à ρ_0 à l'instant $t = 0$.

   L'on a $J = \det \mathbf{F} = 2$, $\theta_V = J - 1 = 1$ puis $\rho = \frac{\rho_0}{J} = \frac{\rho_0}{2}$.

3. Déterminer les dilatations ε_{NN} et ε_{TT} dans les directions $(\vec{N} = \vec{e_1})$ et $(\vec{T} = \vec{e_2})$, ainsi que la distorsion γ_{NT} entre ces deux directions.

   L'on a $\varepsilon_{NN} = \sqrt{\vec{N}.\mathbf{C}.\vec{N}} - 1 = \sqrt{\vec{e_1}.\mathbf{C}.\vec{e_1}} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{2} - 1$. De façon semblable, l'on calcule $\varepsilon_{TT} = \sqrt{\vec{T}.\mathbf{C}.\vec{T}} - 1 = \sqrt{\vec{e_2}.\mathbf{C}.\vec{e_2}} - 1 = \sqrt{C_{22}} - 1 = \sqrt{2} - 1$. Enfin, l'on obtient $\sin(2\gamma_{NT}) = \frac{\vec{N}.2\mathbf{L}.\vec{T}}{\sqrt{\vec{N}.\mathbf{C}.\vec{N}}\sqrt{\vec{T}.\mathbf{C}.\vec{T}}} = \frac{\vec{e_1}.2\mathbf{L}.\vec{e_2}}{\sqrt{\vec{e_1}.\mathbf{C}.\vec{e_1}}\sqrt{\vec{e_2}.\mathbf{C}.\vec{e_2}}} = \frac{2L_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}} = \frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0$, ce qui donne $\gamma_{NT} = 0$.

4. Donner l'expression de la déformation pure $\mathbf{U}$ avant rotation ainsi que de la rotation $\mathbf{R}$.
   De $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ l'on tire
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$
   De $\mathbf{R} = \mathbf{F}.\mathbf{U}^{-1}$ l'on déduit ensuite
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Second exercice : Déformation d'un tube épais

Le tube épais de rayon intérieur R_0, de rayon extérieur R_1 et de hauteur H représenté sur la figure 1 est soumis à un système d'actions mécaniques extérieures induisant la transformation

$$\begin{cases} r &= R \\ \theta &= \Theta \\ z &= Z + \frac{a}{2R_0}(R - R_0)^2 \end{cases}$$

où (R, Θ, Z) (resp^t (r, θ, z)) sont les coordonnées cylindriques d'une particule quelconque mais fixée avant (resp^t après) transformation et où a est une constante positive telle que $a\frac{R_1}{R_0} \ll 1$.

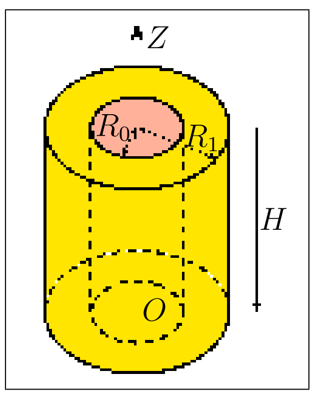

Fig. 1 – Déformation d'un tube épais

1. Représenter la configuration déformée du tube.
   Elle est fournie par la figure 2.

2. Donner, en coordonnées cylindriques, l'expression des composantes du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (on justifiera le caractère infinitésimal de la transformation).
   Le champ des déplacements ayant pour expression $\mathbf{u} = \frac{a}{2R_0}(R - R_0)^2 \vec{e_z}$, son gradient lagrangien est
$$H^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a\frac{R-R_0}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

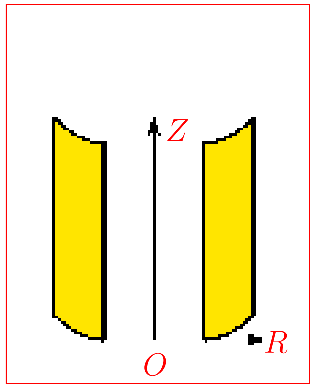

FIG. 2 – Configuration déformée du tube épais

Comme pour tout R compris entre R_0 et R_1 l'on a $a\frac{R-R_0}{R_0} \leq a\frac{R_1-R_0}{R_0} < a\frac{R_1}{R_0} \ll 1$, la transformation est infinitésimale. Le tenseur linéarisé des petites déformations est alors donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a\frac{R-R_0}{2R_0} \\ 0 & 0 & 0 \\ a\frac{R-R_0}{2R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer les directions principales de déformation ainsi que les déformations principales associées.

   La direction $\vec{i_3}=\vec{e_\theta}$ est clairement direction principale de déformation, associée à la déformation principale $\varepsilon_3 = 0$. Comme $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = 0$, les deux autres directions principales de déformation sont $\vec{i_1}= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_r} + \vec{e_z})$ et $\vec{i_2}= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e_r} + \vec{e_z})$, respectivement associées aux déformations principales $\varepsilon_1 = \varepsilon_{rz} = a\frac{R-R_0}{2R_0}$ et $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{rz} = -a\frac{R-R_0}{2R_0}$

Petit problème : Étude d'un écoulement plan

Soit l'écoulement plan défini, relativement au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ associé au système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2), par le champ eulérien des vitesses $\mathbf{v}(\vec{x}) = \frac{q}{2\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t})(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2})$, où q est une constante donnée et strictement positive de dimension $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$, et où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

1. Montrer que l'écoulement est incompressible, puis donner l'expression de la fonction de courant ψ (On rappelle qu l'on a $v_1 = \partial_2\psi$ ainsi que $v_2 = -\partial_1\psi$).

   Comme $v_1 = \frac{qx_1}{2\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t})$ et $v_2 = \frac{qx_2}{2\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t})$, l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_x\mathbf{v} &= \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 \\
&= \frac{q}{2\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t}) - \frac{qx_1}{\pi r^3}\underbrace{\frac{x_1}{r}}_{\partial_1 r}(1 - \mathrm{e}^{-t}) + \frac{q}{2\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t}) - \frac{qx_2}{\pi r^3}\underbrace{\frac{x_2}{r}}_{\partial_2 r}(1 - \mathrm{e}^{-t}) \\
&= \frac{q}{\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t}) - \frac{q\overbrace{(x_1^2 + x_2^2)}^{r^2}}{\pi r^4}(1 - \mathrm{e}^{-t}) \\
&= \frac{q}{\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t}) - \frac{q}{\pi r^2}(1 - \mathrm{e}^{-t}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'écoulement est incompressible.
De

$$\partial_2\psi = v_1 = \frac{qx_1}{2\pi(x_1^2+x_2^2)}(1-\mathrm{e}^{-t}) = \frac{q}{2\pi}\frac{\frac{1}{x_1}}{(1+(\frac{x_2}{x_1})^2)}(1-\mathrm{e}^{-t})$$

l'on tire tout d'abord $\psi = \frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\arctan\frac{x_2}{x_1} + f(x_1)$, où f est une fonction arbitraire de la variable d'espace x_1. L'on a alors

$$\partial_1\psi = \frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\frac{\frac{-x_2}{x_1^2}}{(1+(\frac{x_2}{x_1})^2)} + f'(x_1) = -\frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\frac{x_2}{\underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{r^2}} + f'(x_1) = -v_2 + f'(x_1)$$

ce qui montre, puisque $v_2 = -\partial_1\psi$, que $f'(x_1) = 0$. Ainsi, $\psi = \frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\underbrace{\arctan\ \frac{x_2}{x_1}}_{\theta} + \psi_0$, où ψ_0 est une constante arbitraire que l'on peut donc supposer nulle. L'on a alors

$$\psi = \frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\,\theta$$

2. Déterminer les lignes de courant.

   Ce sont celles des courbes isovaleurs de la fonction de courant ψ. Elles ont donc pour expression θ=cste. Ainsi, les lignes de courant sont les demi-droites passant par l'origine du plan (Ox_1, Ox_1).

3. Montrer que l'écoulement est irrotationnel, puis donner l'expression du potentiel des vitesses φ.

   L'on a

$$\mathbf{rot}_x\mathbf{v} = (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\,\vec{e_z} = \left(-\frac{qx_2}{\pi r^3}\frac{x_1}{r}(1-\mathrm{e}^{-t}) + \frac{qx_1}{\pi r^3}\frac{x_2}{r}(1-\mathrm{e}^{-t})\right)\vec{e_z} = \vec{0}$$

   ce qui montre que l'écoulement est irrotationnel.
   De

$$\partial_1\varphi = v_1 = \frac{qx_1}{2\pi(x_1^2+x_2^2)}(1-\mathrm{e}^{-t}) = \frac{q}{4\pi}\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}(1-\mathrm{e}^{-t})$$

   l'on tire tout d'abord $\varphi = \frac{q}{4\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\ln(x_1^2+x_2^2) + g(x_2)$, où f est une fonction arbitraire de la variable d'espace x_2. L'on a alors

$$\partial_2\varphi = \frac{q}{4\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2} + g'(x_2) = \frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} + g'(x_2) = v_2 + g'(x_2)$$

   ce qui montre, puisque $v_2 = \partial_2\varphi$, que $g'(x_2) = 0$. Ainsi, $\varphi = \frac{q}{4\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\underbrace{\ln(x_1^2+x_2^2)}_{2\ln r} + \varphi_0$, où φ_0 est une constante arbitraire que l'on peut donc supposer nulle. L'on a alors

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\ln r$$

4. Donner l'expression du gradient des vitesses **G**.

   L'on a

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{q}{2\pi r^2}(1-\mathrm{e}^{-t}) \begin{bmatrix} 1-\frac{2x_1^2}{r^2} & -\frac{2x_1x_2}{r^2} \\ -\frac{2x_1x_2}{r^2} & 1-2\frac{x_2^2}{r^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{q}{2\pi r^4}(1-\mathrm{e}^{-t}) \begin{bmatrix} x_2^2-x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

5. Sans chercher à exprimer le champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$, montrer que celui-ci dérive d'un potentiel, puis donner l'expression de ce dernier.

   Comme l'écoulement est irrotationnel et que le champ des vitesses $\mathbf{v}$ dérive du potentiel φ l'on a

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{grad}_x\|\mathbf{v}\|^2 = \frac{\partial(\mathbf{grad}_x\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{grad}_x(\|\mathbf{grad}_x\varphi\|^2) = \mathbf{grad}_x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{grad}_x\varphi\|^2\right)$$

   ce qui montre que le champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$ dérive du potentiel $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{grad}_x\varphi\|^2$.

6. **Bonus** L'on pose $z = x_1 + ix_2$ puis $\phi(z) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$. Montrer que le potentiel complexe ϕ satisfait la relation $\phi(z) = -\frac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\ln\bar{z}$.

   L'on a

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \varphi(x_1,x_2) + i\psi(x_1,x_2) \\ &= \tfrac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\ln r + i\tfrac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\,\theta \\ &= \tfrac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})(\ln r + i\theta) \\ &= \tfrac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})(\ln r + \ln(\mathrm{e}^{i\theta})) \\ &= \tfrac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\ln(r\mathrm{e}^{i\theta}) \\ &= \tfrac{q}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-t})\ln z\end{aligned}$$