

ENTPE

Béton précontraint appliqué aux structures

Justification d'une passerelle

Ludovic Kiekens, Damien Leroy, Carlyne Mazuret
23/01/2017

Table des matières

Introduction.....	2
Question 1 : Caractéristiques mécaniques et moments	3
Calcul des caractéristiques de la section.....	3
Calcul des moments	3
Moment isostatique	3
Moment hyperstatique	4
Moment total	5
Gradient thermique.....	6
Moment maximum et minimum	6
Combinaisons d'actions.....	7
Question 2 : Choix du tracé de câble.....	8
Question 3 : Calcul des effets hyperstatiques créés par le tracé	8
Question 4 : Calcul de la force de précontrainte	9
Question 5 : Vérification des contraintes.....	10
Question 6 : Schéma des coupes transversales	11
Question 7 : Précontrainte centrée.....	13

Introduction

Afin de franchir une brèche, nous souhaitons réaliser une passerelle en béton précontraint dont les dimensions sont présentées ci-dessous.



Figure 1 : Vue en élévation

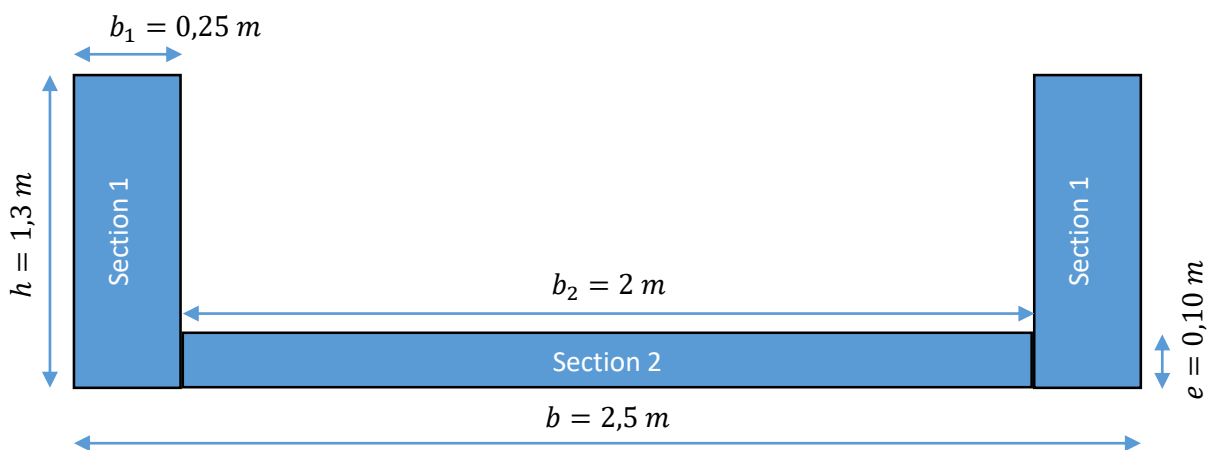


Figure 2 : Coupe transversale

Cette parcelle devra respecter des limites en contrainte à l'ELS Quasi-Permanent, ELS Fréquent et ELS Caractéristiques. Ces limites seront présentées plus loin.

Compte tenu de la symétrie du problème, ne nous justifierons que la première travée.

Question 1 : Caractéristiques mécaniques et moments

Calcul des caractéristiques de la section

Section	Hauteur du centre de gravité z_G [m]	Section S [m ²]	Moment statique $z_G \cdot S$ [m ³]	Terme de transport d'Huygens $z_G^2 \cdot S$ [m ⁴]	Inertie propre par rapport à z_{Gi} $I_{z_{Gi}}$ [m ⁴]
Section 1	$z_{G_1} = \frac{h}{2} = 0,65$	$S_1 = h \cdot b_1 = 0,325$	$z_{G_1} \cdot S_1 = 0,21125$	$z_{G_1}^2 \cdot S_1 = 0,1373125$	$I_{1/z_{G_1}} = \frac{b_1 \cdot h^3}{12} = 0,04577083$
Section 1'	Idem que la section 1				
Section 2	$z_{G_2} = \frac{e}{2} = 0,05$	$S_2 = e \cdot b_2 = 0,2$	$z_{G_2} \cdot S_2 = 0,01$	$z_{G_2}^2 \cdot S_2 = 0,0005$	$I_{2/z_{G_2}} = \frac{b_2 \cdot e^3}{12} = 0,00016667$
Section entière		$S = \sum S_i = 0,85$	$z_G \cdot S = \sum z_{G_i} \cdot S_i = 0,4325$	$I_{/Oy} = \sum z_{G_i}^2 \cdot S_i + I_{1/Oy} = 0,36683$	

Tableau 1 : Caractéristiques mécaniques des sections

$$S = 0,85 \text{ m}^2$$

$$v' = z_G = \frac{z_G \cdot S}{S} = 0,509 \text{ m}$$

$$v = h - v' = 0,791 \text{ m}$$

$$I = I_{/z_G} = I_{/Oy} - z_G^2 \cdot S = 0,147 \text{ m}^4$$

$$\frac{I}{v'} = 0,288 \text{ m}^3$$

$$\frac{I}{v} = 0,186 \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{I}{S \cdot v \cdot v'} = 0,429$$

Calcul des moments

La structure à étudier est hyperstatique, les moments obtenus seront donc la somme des moment isostatique et hyperstatique.

Moment isostatique

Le moment isostatique est calculé par travée. Les charges sont appliquées par travées entières. Nous obtenons donc le graphique suivant.

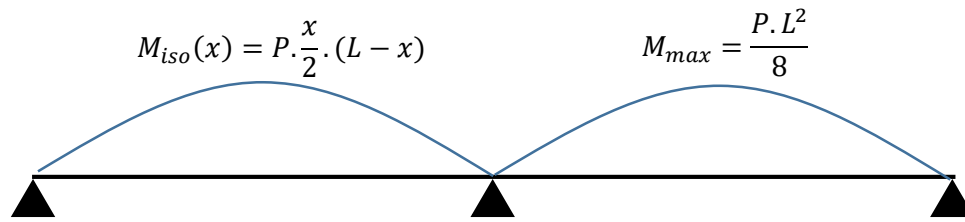


Figure 3 : Moment isostatique

Moment hyperstatique

Nous utilisons la méthode des trois moments pour calculer le moment hyperstatique.

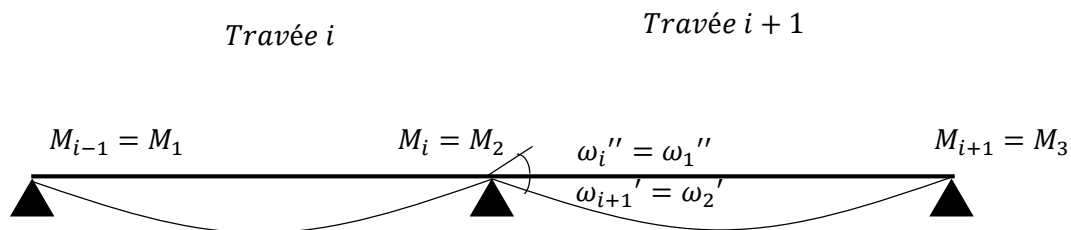


Figure 4 : Schéma de la formule des trois moments

$$b_i \cdot M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) \cdot M_i + b_{i+1} \cdot M_{i+1} = \omega_{i+1}' - \omega_i''$$

Où ω_{i+1}' et ω_i'' sont les rotations isostatiques sous chargement réel.

Ici, M_1 et M_3 sont nuls. On a donc :

$$(c + a) \cdot M_2 = \omega_{i+1}' - \omega_i''$$

De plus, les travées sont de même longueur et d'inertie constante donc :

$$a = c = \frac{L}{3 \cdot E \cdot I}$$

Dans les cas étudiés, les chargements sont appliqués par travée entière. On a donc, lorsque la travée est chargée :

$$\omega_1'' = \int_0^L M_{iso}(x) \cdot \frac{x \, dx}{L \cdot E \cdot I}$$

$$\omega_1'' = \int_0^L P \cdot \frac{x}{2} \cdot (L - x) \cdot \frac{x \, dx}{L \cdot E \cdot I}$$

$$\omega_1'' = \frac{P}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^L \left(-\frac{x^3}{L} + x^2 \right) dx = \frac{P}{2 \cdot E \cdot I} \left[-\frac{x^4}{4 \cdot L} + \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{P \cdot L^3}{2 \cdot E \cdot I} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{P \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

Finalement on obtient :

- Travée 1 ou 2 chargée :

$$M_2 = -\frac{P.L^3}{24.E.I} \cdot \frac{3.E.I}{2.L} = -\frac{P.L^2}{16}$$

$$M_{hyper}(x) = -\frac{x.P.L}{16}$$

- Travée 1 et 2 chargée :

$$M_2 = \frac{P.L^2}{8}$$

$$M_{hyper}(x) = -\frac{x.P.L}{8}$$

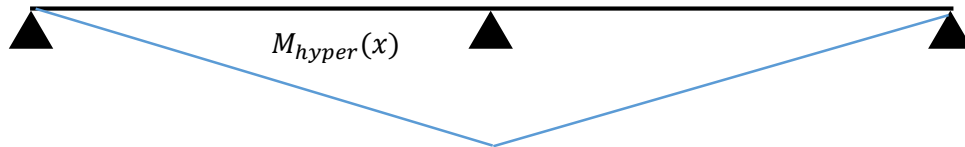


Figure 5 : Moment hyperstatique le long de l'ouvrage

Moment total

Travée 1 de chargée :

$$M(x) = M_{iso}(x) + M_{hyper}(x) = -\frac{x.P.L}{16} + \frac{x.P.(L-x)}{2}$$

$$M'(x) = -\frac{P}{16} \cdot (16.x - 7.L) \rightarrow M_{max} \text{ pour } x = \frac{7.L}{16}$$

$$M_{max} = \frac{49.P.L^2}{512}$$

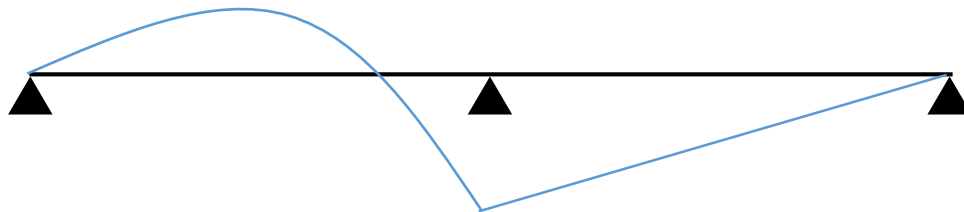


Figure 6 : Moment généré par le chargement de la travée 1

Travée 2 chargée :

$$M(x) = M_{hyper}(x) = -\frac{x.P.L}{16}$$

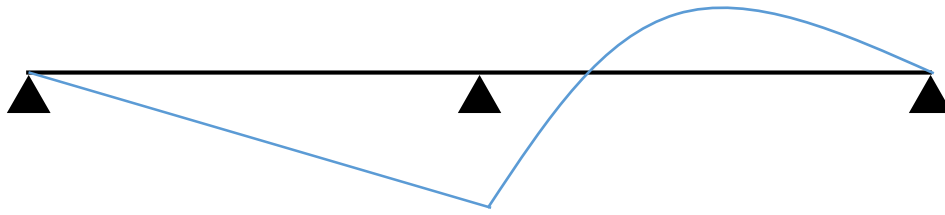


Figure 7 : Moment généré par le chargement de la travée 2

Travée 1 et 2 chargées :

$$M(x) = M_{iso}(x) + M_{hyper}(x) = -\frac{x.P.L}{8} + \frac{x.P.(L-x)}{2}$$

$$M'(x) = -\frac{P}{8} \cdot (8.x - 3.L) \rightarrow M_{max} \text{ pour } x = \frac{3.L}{8}$$

$$M_{max} = \frac{9.P.L^2}{128}$$

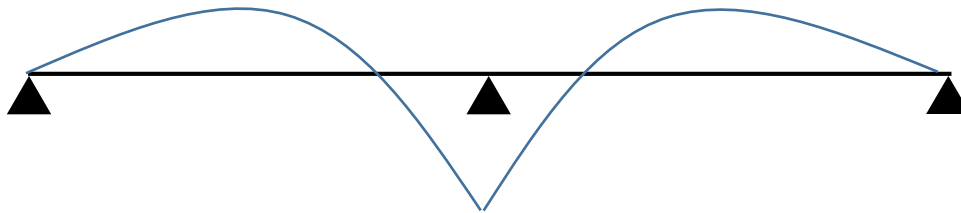


Figure 8 : Moment généré par le chargement des travées 1 et 2

Gradient thermique

Le moment hyperstatique sur l'appuis central dû au gradient thermique est estimé par la formule suivante :

$$M_{thermique} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Ecm.I.K_T \cdot \Delta_T}{h}$$

Nous considèrerons que ce gradient thermique correspondant à une différence de température entre le haut et le bas de la poutre s'applique tout le temps.

Moment maximum et minimum

Pour chaque cas de charges, nous obtenons les valeurs de moment au niveau des sections potentiellement critiques.

Position	Moment [kN.m]				
	Poids propre	Surcharges sur 2 travées	Surcharges sur travée 1	Surcharges sur travée 2	Gradient thermique
à 3/8 de L	3735,35156	1406,25	1875	-468,75	297,203493
à 7/16 de L	3631,5918	1367,1875	1914,0625	-546,875	346,737408
à mi-travée	3320,3125	1250	1875	-625	396,271324
sur appuis	-6640,625	-2500	-1250	-1250	792,542647

Tableau 2 : Valeurs des moments générés par les différents cas de charges au niveau des sections potentiellement critiques

Combinaisons d'actions

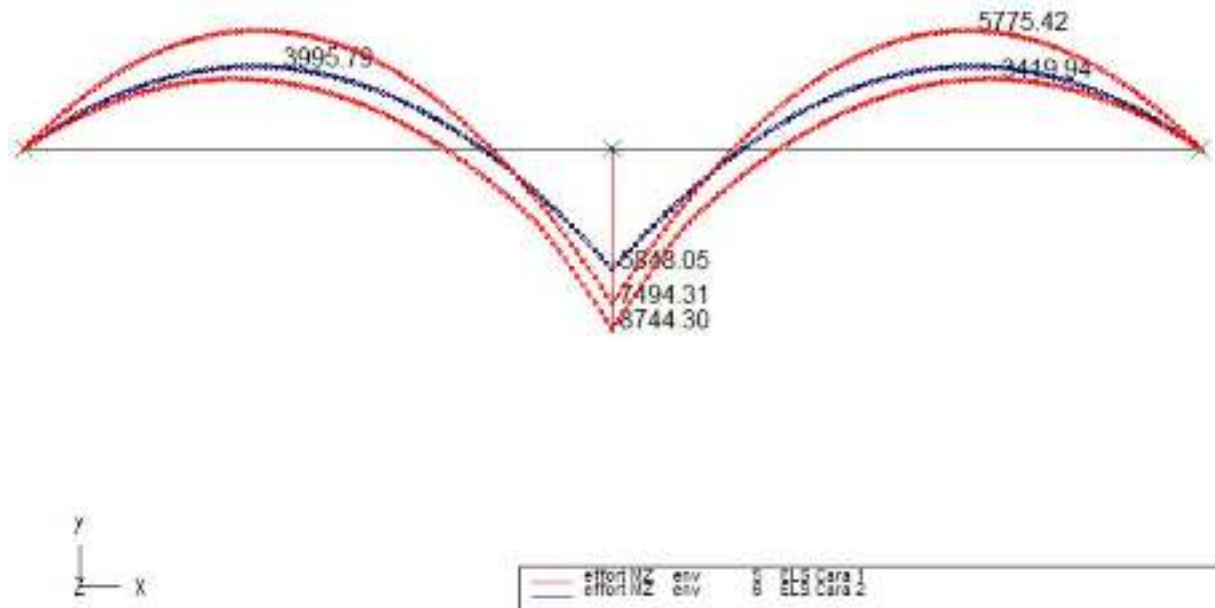


Figure 9 : Graphique des moments obtenus à l'ELS Caractéristique

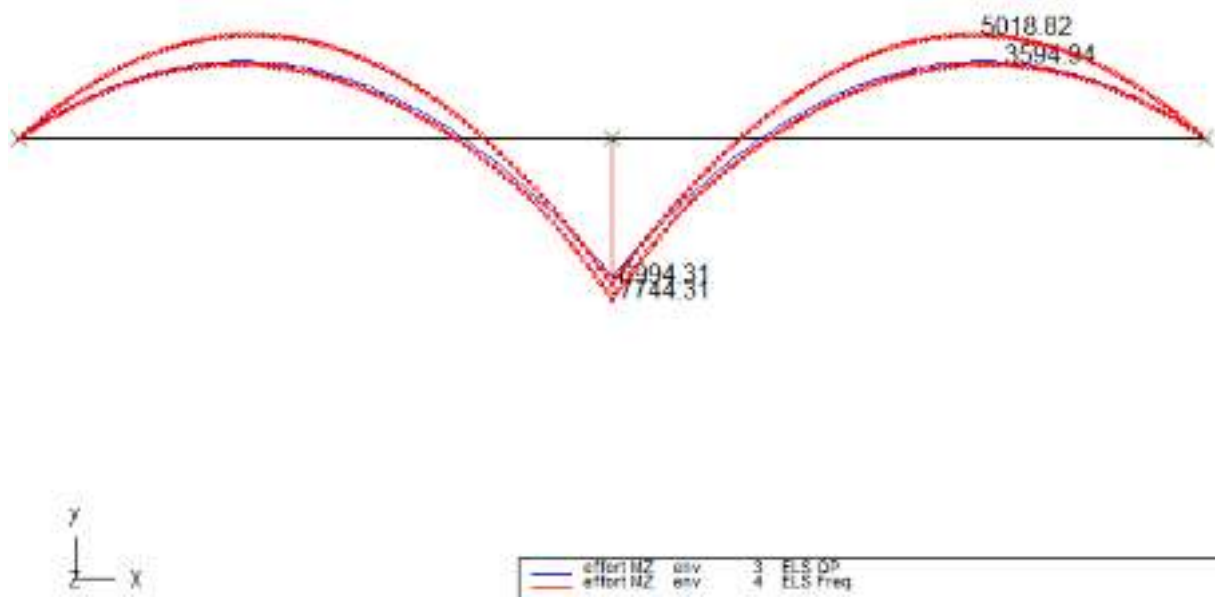


Figure 10 : Graphique des moments obtenus à l'ELS Quasi-Permanent et à l'ELS Fréquent

Position	Moment [kN.m]					Caractéristique 2
	Quasi permanent	Fréquent		Caractéristique 1		
		max	min	max	min	
à 3/8 de L	3735	5009	3603	5759	3415	4033
à 7/16 de L	3632	4953	3477	5719	3258	3978
à mi-travée	3320	4643	3143	5393	2893	3717
sur appuis	-6641	-6994	-7744	-7494	-8744	-5848

Tableau 3 : Valeurs des moments obtenus pour les différentes combinaisons d'actions. En rouge sont affichées les valeurs utilisées pour la suite

Question 2 : Choix du tracé de câble

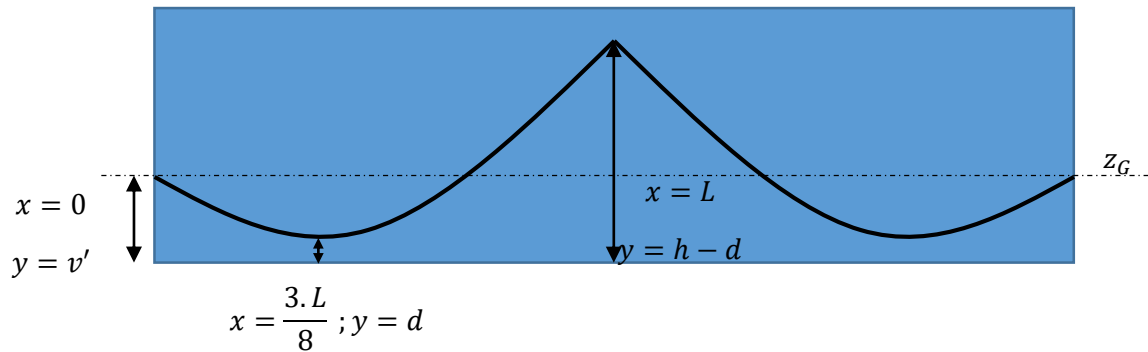


Figure 11 : Schéma du tracé du câble de précontrainte

On cherche l'équation du tracé du câble de la travée 1 de la forme d'une parabole passant par les points

$$\begin{cases} P1 : (0 ; v') \\ P2 : \left(\frac{3L}{8} ; d\right) \\ P3 : (L ; h - d) \end{cases}$$

On cherche donc $y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ et pose les matrices et vecteurs suivant :

$$A = \begin{matrix} & x^2 & x & 0 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 351,56 & 18,75 & 1 \\ 2500 & 50 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} ; B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} v' = 0,509 \\ d = 0,3 \\ h - d = 1 \end{pmatrix}$$

On a $A \cdot B = C$ donc $B = A^{-1} \cdot C$ d'où :

$$B = \begin{pmatrix} a = 0,00067075 \\ b = -0,0237137 \\ c = v' = 0,5088 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir l'équation du câble de la travée 2, il suffit de réaliser un changement de variable

$$X = x - 2 \cdot L$$

L'équation de l'excentrement du câble $e_0(x)$ est obtenue avec $c = 0$

$$e_0(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

Question 3 : Calcul des effets hyperstatiques créés par le tracé

On cherche les effets isostatiques dû aux câbles de précontraintes. On applique donc de nouveau la méthode des trois moments.

$$m_{iso}(x) = m(x) = P \cdot e_0(x) = P \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

$$-\omega'_3 = \omega''_2 = \int_0^L m(x) \cdot \frac{x}{L} \frac{dx}{EI} = \int_0^L e_0(x) \cdot \frac{x}{L} dx \cdot \frac{P}{EI} = \frac{P}{EI} \cdot \int_0^L (a \cdot x^2 + b \cdot x) \cdot \frac{x}{L} dx = \frac{P}{EI} \cdot \frac{3 \cdot a \cdot L + 4 \cdot b}{12} L^2$$

Donc

$$(c + a) * M_2 = \omega'_3 - \omega''_2$$

$$\left(\frac{L}{3EI} + \frac{L}{3EI}\right) * M_2 = -2 \cdot \frac{P}{EI} \cdot \frac{3 \cdot a \cdot L + 4 \cdot b}{12} L^2$$

$$\frac{2 \cdot L}{3} * \frac{M_2}{P} = -2 \cdot \frac{3 \cdot a \cdot L + 4 \cdot b}{12} L^2$$

$$\frac{M_2}{P} = -2 \cdot \frac{3 \cdot a \cdot L + 4 \cdot b}{8} L = -0,072 m$$

Sur la travée 1, on a donc :

$$M_{hyper} = M_2 \cdot \frac{x}{L}$$

$$e_{00}(x) = e_0(x) + \frac{M_2}{P} \cdot \frac{x}{L} = A \cdot x^2 + B \cdot x = 0,00067075 x^2 - 0,02515294 x$$

Question 4 : Calcul de la force de précontrainte

On cherche à calculer la force de précontrainte minimale pour respecter les conditions de traction aux différents États Limites de Service à mi-travée et sur l'appui central.

Comme on raisonne uniquement sur les contraintes en traction, à mi-travée nous allons nous intéresser uniquement à la semelle inférieure, et sur appui, uniquement à la semelle supérieure.

On a à mi-travée, c'est-à-dire quand le moment est maximal donc en $x = 18,75m$

$$\sigma_{inf} = \frac{P}{S} + (P \cdot e_0(18,75) + M_{max}) \frac{v'}{I}$$

Sur appui central on a,

$$\sigma_{sup} = \frac{P}{S} - (P \cdot e_0(50) + M_{min}) \frac{v}{I}$$

On fixe $P = 12 MN$ (soit 6 câbles)

$$\text{On a } e_{00}(x) = e_0(x) + \frac{M_{hyper}}{P}$$

$$\text{D'où à } x = 18,75 m \rightarrow e_{00}(x) = -0,236 m \text{ et à } x = 50 \rightarrow e_{00}(x) = 0,419 m$$

On calcule ces contraintes aux ELS quasi-permanent, fréquent et caractéristiques 1 et 2 avec les valeurs des combinaisons obtenues à la première question. Ces contraintes doivent être supérieures à $0 MPa$ pour les ELS quasi-permanent et $-f_{ctm} = -4,4 MPa$ pour les ELS caractéristiques.

On obtient les valeurs ci-dessous

	ELS Quasi permanent	ELS fréquent	ELS caractéristique 1	ELS caractéristique 2
Contraintes à mi-travée (kPa)	12417	7830	5229	11043
Contraintes sur l'appui central (kPa)	5438	-511	-5902	9711
Valeurs limites des contraintes (kPa)	0	0	-4400	-4400

On remarque que pour les ELS fréquent et caractéristique 1 les contraintes limites ne sont pas respectées. On réitère les calculs en prenant 7 câbles de précontrainte soit $P = 14 MN$.

On obtient les résultats suivants

	ELS Quasi permanent	ELS fréquent	ELS caractéristique 1	ELS caractéristique 2
Contraintes à mi-travée (kPa)	16405	11818	9217	15031
Contraintes sur l'appui central (kPa)	12311	6361	971	16583
Valeurs limites des contraintes (kPa)	0	0	-4400	-4400

Les contraintes limites sont bien respectées. Il nous faut donc 7 câbles de précontrainte pour une force de précontrainte de $14 MN$. Dans la mesure où nous avons utilisé la symétrie dans les calculs précédents, nous prendrons 8 câbles de précontraintes pour garder cette symétrie.

NB : La valeur minimale de la force de précontrainte permettant de respecter les contraintes limites est de $12,437 MN$.

Question 5 : Vérification des contraintes

Nous allons maintenant vérifier les contraintes pour les différentes sections : sur appui de rive, à mi-travée et sur appui central avec $P = 16MN$.

On réutilise alors la même formule que précédemment avec par exemple pour la fibre sup à mi-travée :

$$\sigma_{sup} = \frac{P}{S} - (P \cdot e_0(18.75) + M_{max}) \frac{v}{I}$$

Sur appui de rive il n'y a pas d'excentrement $v=0$ d'où

$$\sigma_{sup} = \sigma_{inf} = \frac{P}{S}$$

Les contraintes en traction ne doivent pas être négatives aux ELS quasi permanent et fréquent, et ne doivent pas dépasser $-f_{ctm}$ à l'ELS caractéristique.

En compression à l'ELS quasi permanent les contraintes ne doivent pas dépasser $0,45f_{ck}$ et aux ELS fréquent et caractéristiques $0,6f_{ck}$.

On obtient les valeurs suivantes

(kPa)	ELS QP	ELS fréquent	ELS cara 1	ELS cara 2
Contraintes à mi travée fibre sup	16384	23516	27559	18520
Contraintes à mi travée fibre inf	20393	15806	13205	19019
Contraintes sur appui central fibre sup	19184	13234	7843	23456
Contraintes sur appui central fibre inf	18592	22418	25885	15844
Contraintes sur appuis de rive fibre inf	18824	18824	18824	18824
Contraintes sur appuis de rive fibre sup	18824	18824	18824	18824
Contraintes maximales	20393	23516	27559	23456
Contraintes minimales	16384	13234	7843	15844
Contraintes limites en compression	27000	36000	36000	36000
Contraintes limites en traction	0	0	-4400	-4400

Les valeurs de contraintes sont toutes respectées, la poutre avec 8 câbles de précontraintes est vérifiée à l'ELS.

Question 6 : Schéma des coupes transversales

On veille à garder une distance de $0,5 \varphi = 4 \text{ cm}$ entre les câbles ou entre les câbles et les parois. On prend des armatures de 2 cm de diamètre, correspondant aux armatures majoritairement utilisées.

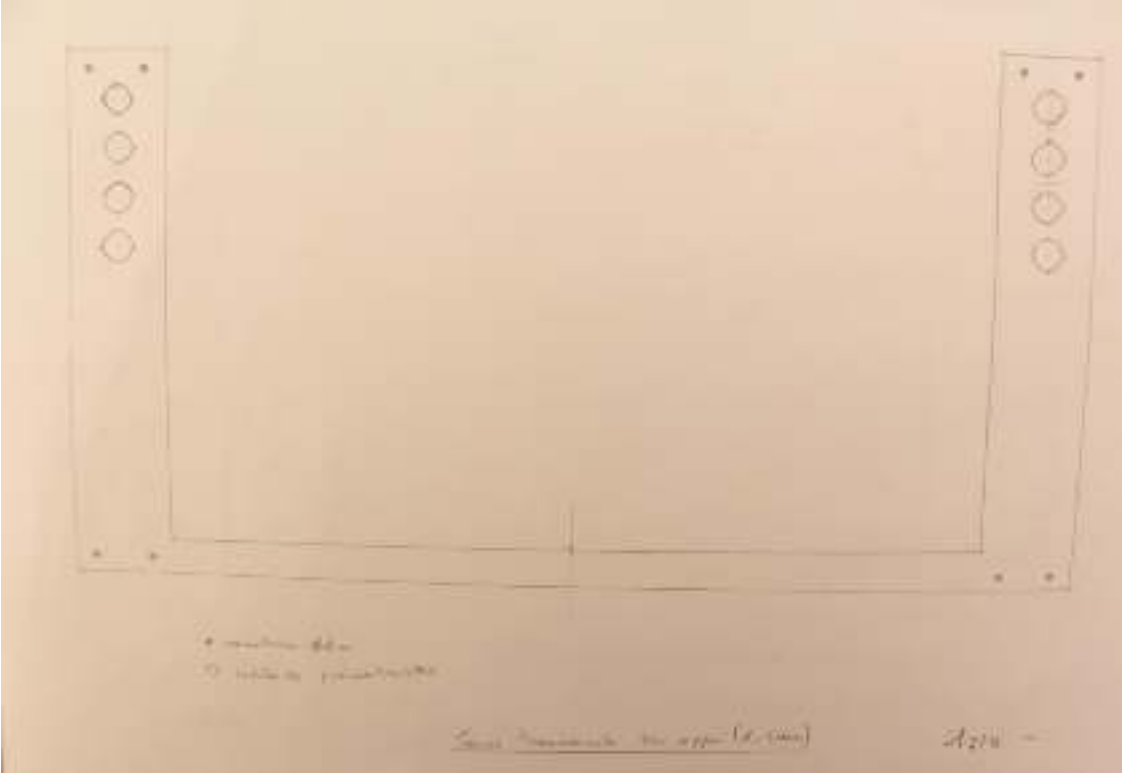


Figure 12 - Coupe transversale sur appui

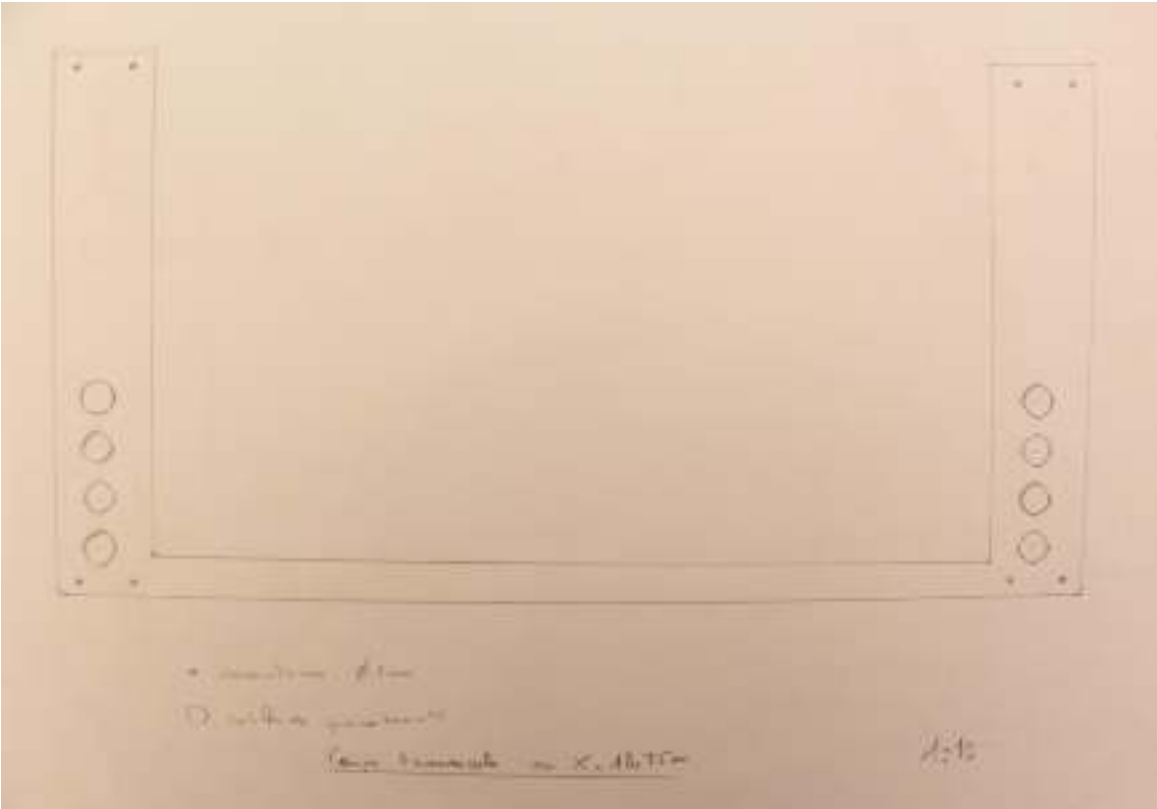


Figure 13 - Coupe transversale en X=18.75m

Question 7 : Précontrainte centrée

On s'intéresse maintenant au cas d'une poutre avec une précontrainte centrée, c'est-à-dire avec le tracé aligné sur la fibre neutre de la poutre. On rappelle que $v' = 0,509m$.



On a :

$$e_0(x) = 0, \forall x$$

Comme on raisonne en traction, on n'étudiera que la semelle inférieure à mi-travée et la semelle supérieure sur appui.

Donc en reprenant les formules de la question 4, on obtient :

$$\sigma_{inf} = \frac{P}{S} - M_{max} * \frac{v'}{I}$$

$$\sigma_{sup} = \frac{P}{S} + M_{min} * \frac{v}{I}$$

On va ensuite calculer les contraintes aux différents ELS, tout en prenant garde à ce qu'elles soient supérieures aux valeurs limites, ie $0 MPa$ aux ELS quasi-permanent et fréquent, et $-4.4 MPa$ aux ELS caractéristiques. Pour cela, on fera varier le nombre de câbles n , afin de modifier P :

$$P = 0,88 \cdot n \cdot 1800 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma_{p0}$$

On débute le calcul en prenant le nombre de câbles trouvé aux questions précédentes, $n = 8$.

	ELS Quasi permanent	ELS fréquent	ELS caractéristique 1	ELS caractéristique 2
Contraintes à mi-travée (kPa)	9233	4818	2218	8203
Contraintes sur l'appui central (kPa)	-13614	-15520	-24955	-9342
Valeurs limites des contraintes (kPa)	0	0	-4400	-4400

Nous pouvons remarquer que les valeurs aux ELS sur appui sont inférieures aux valeurs limites. Il faut donc augmenter le nombre de câbles, en gardant toujours une symétrie de câbles, c'est-à-dire un nombre pair.

En augmentant au fur et à mesure n , on trouve des contraintes admissibles à partir de $n = 16$,

	ELS Quasi permanent	ELS fréquent	ELS caractéristique 1	ELS caractéristique 2
Contraintes à mi-travée (kPa)	31417	27001	24401	30387
Contraintes sur l'appui central (kPa)	8569	2619	-2771	12841
Valeurs limites des contraintes (kPa)	0	0	-4400	-4400

Par conséquent, il faut 16 câbles, soit le double des résultats précédents, pour respecter les conditions en traction dans le cas d'une précontrainte centrée. La force de précontrainte sera alors de 37,7 MN.