E.N.T.P.E.
Méthodes Statistiques pour l'Ingénieur – Examen

Mercredi 1er février 2017

Instructions et indications importantes

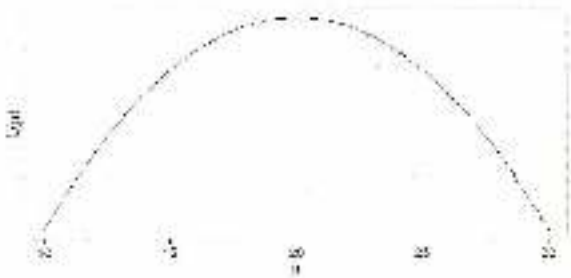
Une feuille de notes recto-verso au format A4 ainsi qu'une calculatrice sont autorisées.
La qualité de la rédaction (précision, concision et soin) sera prise en compte dans la notation.
Le barème est uniquement donné à titre indicatif et pourra être modifié ultérieurement.
Les tables de lois sont en annexe de ce sujet.

Exercice 1 : Questions rapides (7 *pts*)

(1) Quelles sont les qualités (ou propriétés) attendues d'un estimateur T d'un paramètre θ ?

(2) On cherche à estimer un paramètre θ. On dispose de 3 estimateurs sans biais, indépendants et de même variance σ^2 : T_1, T_2, et T_3.
On introduit les trois estimateurs suivants : $E_1 = \frac{T_1+T_2+T_3}{3}$, $E_2 = \frac{T_1+3T_2-T_3}{3}$ et $E_3 = \frac{2T_1+T_2+2T_3}{5}$.
Parmi les 6 estimateurs T_1, T_2, T_3, E_1, E_2, et E_3, quel serait votre choix ? Justifier.

(3) La fonction de vraisemblance ci-contre est obtenue sur un échantillon aléatoire de trois observations ($x_1 = 17$, $x_2 = 23$ et $x_3 = 10$), tirés d'une population normale dont l'écart-type σ est connu et vaut 6, et l'espérance μ est inconnue.



(a) Quelle est l'estimation par le maximum de vraisemblance du paramètre μ pour l'échantillon ? Expliquer.

(b) Supposons une quatrième observation $x_4 = 21$. Reproduire le graphique sur votre copie, et ajouter au graphique précédent, la représentation graphique (à main levée) de la fonction de vraisemblance obtenue pour ce nouvel échantillon de quatre valeurs.

(4) Lors d'un test statistique bilatéral sur une probabilité, la p-valeur diminue si le niveau de confiance que l'on se fixe, $(1-\alpha)$, augmente. Vrai, Faux, On ne peut pas conclure ? Justifier.

(5) Dans le cadre d'un test d'hypothèse, on rappelle que la p-valeur, aussi appelée *probabilité critique*, est la probabilité d'obtenir la même valeur (ou une valeur encore plus extrême) du test si l'hypothèse nulle était vraie. Lors d'un test statistique, après calcul de la p-valeur, un statisticien a conclu au rejet de H0 avec un risque de 1ère espèce de 5%. Pouvez-vous conclure pour un risque de 1ère espèce de 1% ? Si oui, quelle est alors votre conclusion ?

(6) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ, de densité telle que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$, 0 sinon. Déterminer l'expression de l'estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 2 : Statistiques sur une variable aléatoire à densité (5 *pts*)

Soit θ un réel positif. On considère X une variable aléatoire de densité :
$f(x) = \frac{2x}{\theta^2}$ si $0 \leq x \leq \theta$ et $f(x) = 0$ sinon.

(1) Montrer que l'espérance est $E(X) = \frac{2}{3}\theta$ et la variance est $V(X) = \frac{\theta^2}{18}$.

(2) On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f. On introduit $\bar{X}$ la moyenne empirique. Déterminer un réel a tel que $T = a.\bar{X}$ ait pour espérance θ.

(3) En précisant le théorème utilisé, montrer que l'on peut approcher la densité de T par une loi normale $N(m_T, \sigma_T^2)$dont on précisera les paramètres.

(4) En déduire qu'il existe z_α un réel positif tel que l'intervalle $\left[\frac{T}{1+\frac{z_\alpha}{2\sqrt{2n}}}; \frac{T}{1-\frac{z_\alpha}{2\sqrt{2n}}}\right]$ soit un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance $1-\alpha$. NB : On pourra partir de la définition de l'intervalle de confiance et on remarquera que σ_T^2 est connue.

(5) On a obtenu 100 mesures de moyenne 3,18. Calculer cet intervalle pour $\alpha = 0{,}04$.

Exercice 3 : Tests d'hypothèses (4 *pts*)

Une variété de microprocesseur a une probabilité connue et fixée à 10% de surchauffer en usage normal. On met en place un correctif du procédé de fabrication pour 200 microprocesseurs et on constate que 17 d'entre eux ont surchauffé. On souhaite déterminer si le résultat de cette expérience permet de conclure que le traitement a modifié la probabilité de surchauffe.
On veut tester cette probabilité avec un risque de 1ère espèce $\alpha = 0{,}03$.

(1) Présenter le problème sous forme d'un test sur une probabilité : modéliser en explicitant la variable aléatoire et le paramètre à tester, écrire les hypothèses H0 et H1, donner la règle de décision.

(2) Calculer le (ou les) seuil(s) de rejet, puis la *p*-valeur, vous ferez le calcul avec les tables. Pour rappel, la *p*-valeur est la plus grande valeur du seuil de test pour laquelle on ne rejette pas H0.

(3) Conclure et compléter la phrase suivante : "on peut dire (on ne peut pas dire) avec un risque de 1ère espèce $\alpha = 0{,}03$ que le traitement a modifié (n'a pas modifié la probabilité de surchauffe)".

Exercice 4 : Comparaison de deux populations (4 *pts*)

On sait que la consommation moyenne de *jus de fruit* au cours d'une soirée liste à l'ENTPE est de 5,5 litres, tandis que celle des étudiants de l'Ecole Centrale est connue et fixée à 6 litres. Nous avons recueilli la consommation de *jus de fruit* d'un groupe de 24 étudiants, que l'on sait issus de la même école d'ingénieur. La consommation moyenne de ces 24 étudiants est de 5.75 litres avec un écart-type empirique de 0,75 litre. Nous voudrions déterminer si ces étudiants sont bien issus du modèle de l'ENTPE avec un risque de 1%. On suppose que la consommation de *jus de fruit* des étudiants de l'ENTPE suit une loi normale de paramètres m et σ.

(1) Formuler le problème sous forme d'un test d'hypothèses (Préciser les hypothèses H0 et H1)

(2) Déterminer le seuil h séparant les zones d'acceptation et de rejet de H0, puis conclure quant à l'échantillon considéré.

(3) Quelle est la puissance de ce test ? Que peut-on en conclure ?

Annexes : Tables de répartition/ des quantiles des lois usuelles

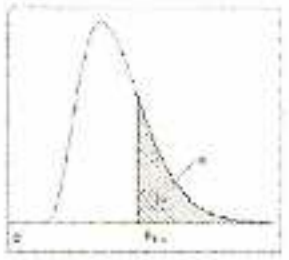
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table des quantiles de la loi normale centrée-réduite (équivalente à la able ci-dessus)

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	$-\infty$	-3.090	-2.878	-2.748	-2.652	-2.576	-2.512	-2.457	-2.409	-2.366
0.01	-2.326	-2.290	-2.257	-2.226	-2.197	-2.170	-2.144	-2.120	-2.097	-2.075
0.02	-2.054	-2.034	-2.014	-1.995	-1.977	1.960	-1.943	-1.927	-1.911	-1.896
0.03	-1.881	-1.866	-1.852	-1.838	-1.825	-1.812	-1.799	-1.787	-1.774	-1.762
0.04	-1.751	-1.739	-1.728	-1.717	-1.706	-1.695	-1.685	-1.675	-1.665	-1.655
0.05	1.645	1.635	1.626	1.616	1.607	-1.598	-1.589	-1.581	-1.572	-1.563
0.06	1.555	-1.546	-1.538	-1.530	-1.522	-1.514	-1.506	-1.498	-1.491	-1.483
0.07	1.476	1.468	1.461	1.454	-1.447	-1.440	-1.433	-1.425	-1.419	-1.412
0.08	-1.405	-1.398	-1.392	-1.385	1.379	1.372	-1.366	-1.359	-1.353	-1.347
0.09	-1.341	-1.335	-1.329	-1.323	-1.316	-1.311	1.305	1.299	1.293	1.287
0.9	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.316	1.323	1.329	1.335
0.91	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.92	1.405	1.412	1.419	1.425	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.93	1.476	1.483	1.491	1.498	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.94	1.555	1.563	1.572	1.581	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

Table du χ^2 de Pearson ν degrés de liberté

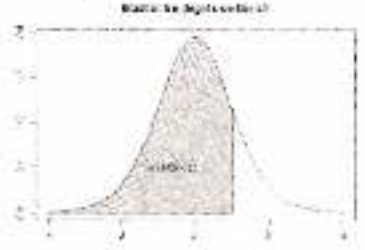
Si X est une variable aléatoire suivant une loi du χ^2, ou de Pearson, à ν degrés de liberté, la table donne, pour α fixé, la valeur $x_{1-\alpha}$ telle que $P(X \geq x_{1-\alpha}) = \alpha$.
Ainsi, $x_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à ν degrés de liberté.
Lorsque le *degré de liberté* ν est tel que $\nu > 30$, la variable aléatoire : $Z = \sqrt{2X} - \sqrt{2\nu - 1}$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$



	$P(X \leq x)$								
ν	0.99	0.975	0.95	0.90	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
1.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	10.8276
2.0000	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	13.8155
3.0000	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	16.2662
4.0000	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	18.4668
5.0000	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	20.5150
6.0000	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	22.4577
7.0000	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	24.3219
8.0000	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	26.1245
9.0000	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	27.8772
10.0000	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	29.5883
11.0000	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	31.2641
12.0000	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	32.9095
13.0000	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	34.5282
14.0000	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	36.1233
15.0000	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	37.6973
16.0000	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	39.2524
17.0000	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	40.7902
18.0000	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	42.3124
19.0000	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	43.8202
20.0000	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	45.3147
21.0000	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	46.7970
22.0000	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	48.2679
23.0000	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	49.7282
24.0000	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	51.1786
25.0000	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	52.6197
26.0000	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	54.0520
27.0000	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	55.4760
28.0000	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	56.8923
29.0000	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	58.3012
30.0000	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	59.7031

Table de loi : Student à n degrés de liberté

(inverse de la fonction de répartition)
Donne $t_{n,\alpha}$ tel que : $P(X \leq t_{n,\alpha}) = \alpha$ et $P(X \leq -t_{n,\alpha}) = 1 - P(X \leq t_{n,\alpha})$.



n / α	0.600	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
35	0,255	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,254	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291