ENTPE novembre 2016

Résistance des matériaux – Test sujet

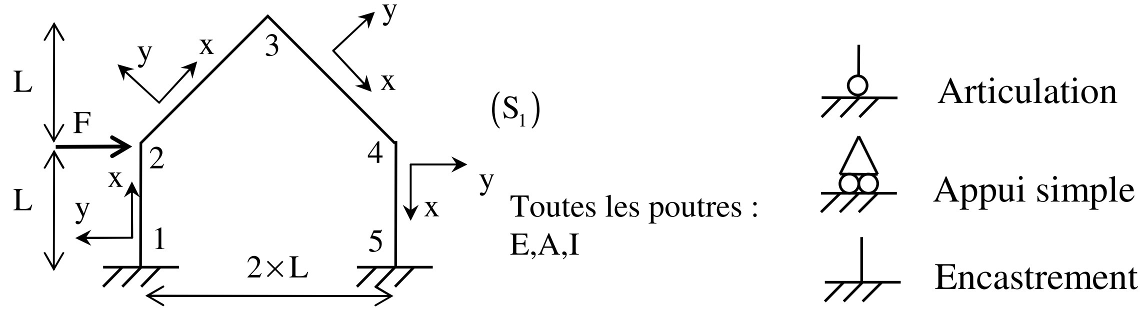
Documents autorisés : Polycopiés, notes de cours et calculatrice

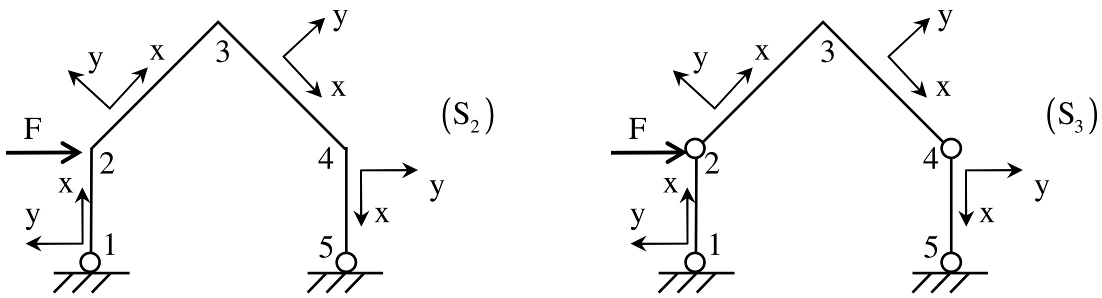
Partie I : Choix de résolution (3 pts)

Pour chacun des 3 problèmes suivants, indiquez si possible :

Pour la méthode des forces :
- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place

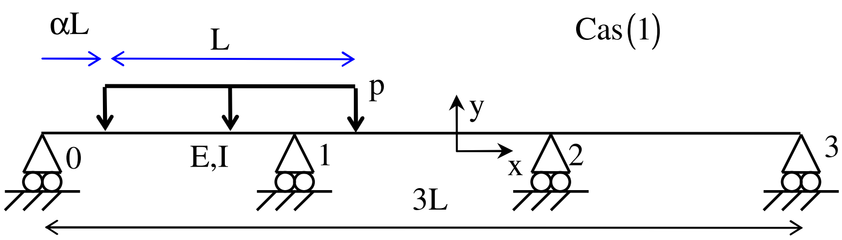
Pour la méthode des rotations :
- Les inconnues cinématiques
- Les équations en fonctions des M_{ij} associées à chaque inconnue





Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments) (6 pts)

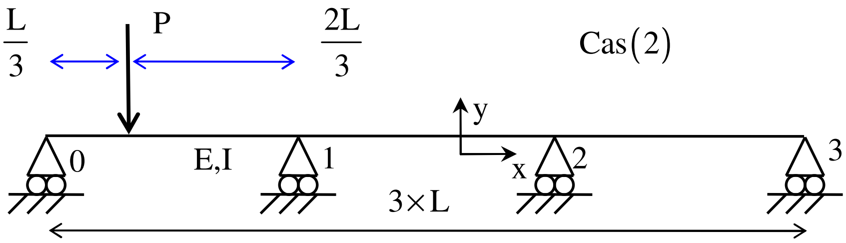
Poutre continue sur 4 appuis de 3 travées identiques.
Un logiciel vous indique que dans le cas d'une charge mobile répartie sur une longueur L, pour avoir le moment M_1 le plus petit possible, il faut positionner celle-ci comme ci après avec $\alpha = \frac{1}{3}$:



$$M_1\left(\alpha=\frac{1}{3}\right)=M_{1,min}=-\frac{113}{1620}pL^2=-0,06975pL^2$$

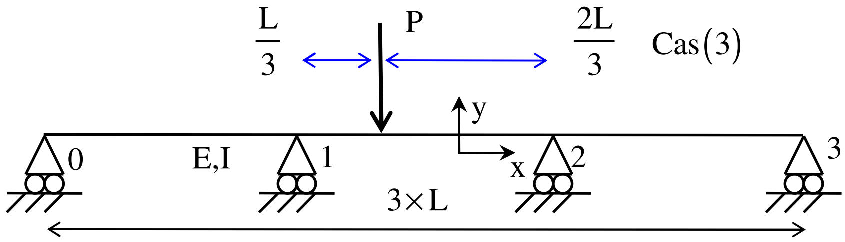
Nous allons vérifier cette affirmation.

Déterminer les moments sur appuis dans le cas suivant :



Tracer la courbe des moments fléchissants.

Déterminer les moments sur appuis dans le cas suivant :



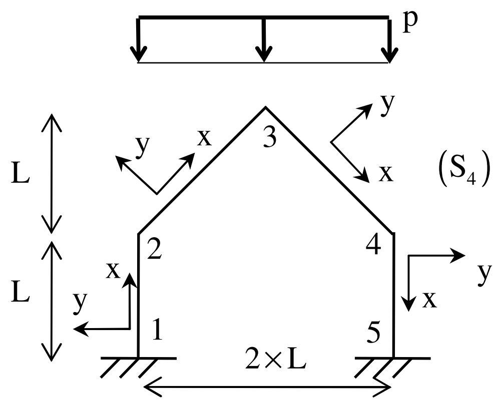
Ne tracer pas la courbe des moments fléchissants.
Vérifier que dans les cas 2 et 3 les moments sur l'appui 1 sont égaux

En déduire pour le cas 1 : $M_1\left(\alpha=\frac{1}{3}+d\alpha\right)$

Conclure sur le minimum de M_1 pour le cas 1

Partie III : Méthode des rotations (8 pts)

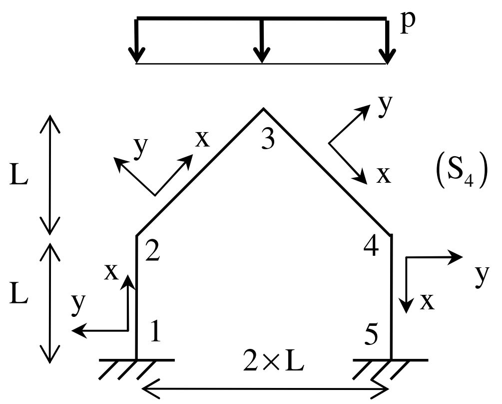
Déterminer les sollicitations dans le problème suivant : **Doc Réponse**
Remarque :
On se servira de la symétrie pour se ramener à un système linéaire de degré 2
On montrera: $M_{12}=-0,155pL^2$ $M_{21}=-M_{23}=-0,168pL^2$ $M_{32}=0,009pL^2$
A défaut d'être résolu, le problème sera bien posé



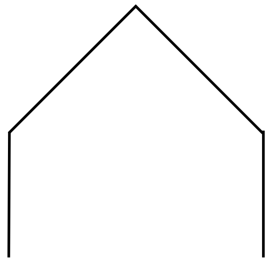
Toutes les poutres :
E,A,I

Document Réponse : Nom :

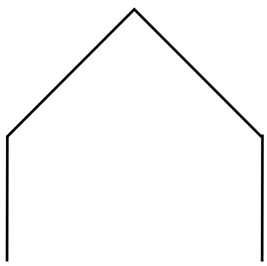
Partie III : Méthode des rotations



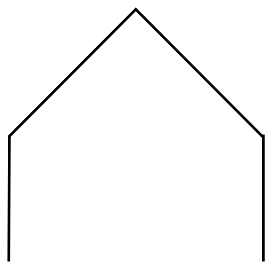
N



V



M



Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

Etude de la structure (S_4) de la partie III

<u>Répondre entièrement sur ce **Doc Réponse**</u>

La matrice de rigidité globale change-t-elle si on néglige ou pas les déformations d’effort normal ?

La matrice de rigidité globale change-t-elle si on change la numérotation des nœuds ?

Est-elle toujours inversible ?

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :

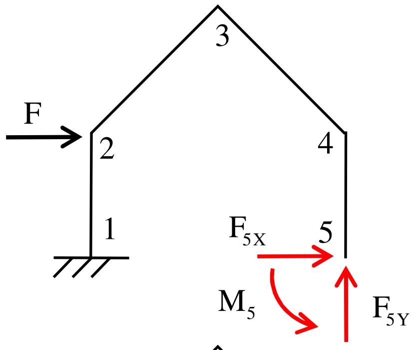
Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système

Comment interpréter un second membre nul ?

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

Pour la méthode des forces :



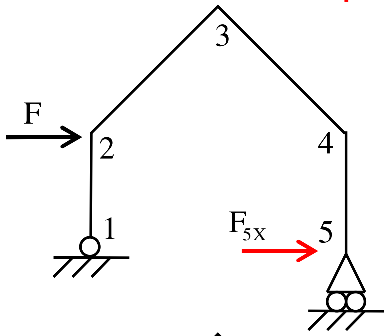
(S_1)

Méthode des forces :
3 inconnues hyperstatiques :

$$F_{5X}, F_{5Y}, M_5$$

Equations de type cinématique :

$$\begin{cases} U_5 = 0 \\ V_5 = 0 \\ \Omega_5 = 0 \end{cases}$$



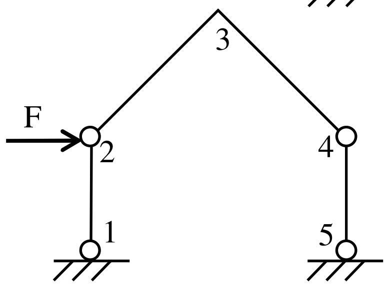
(S_2)

Méthode des forces :
1 inconnues hyperstatiques :

$$F_{5X}$$

Equations de type cinématique :

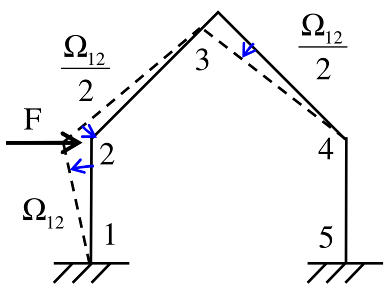
$$U_5 = 0$$



(S_3)

Mécanisme

Pour la méthode des rotations :



(S_1)

5 inconnues cinématiques

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, U_2, U_4$ ou

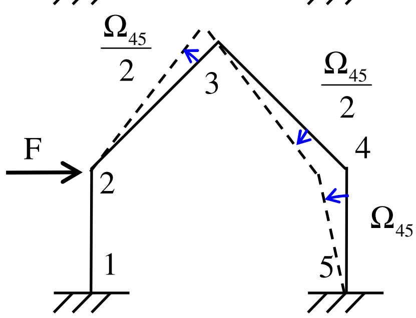
$\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_{12}, \Omega_{45}$

$$\Omega_{23} = -\frac{\Omega_{12}}{2} + \frac{\Omega_{45}}{2} \text{ et } \Omega_{34} = \frac{\Omega_{12}}{2} - \frac{\Omega_{45}}{2}$$

Equation de type statique :

$$\boxed{M_{21} + M_{23} = 0} \quad \boxed{M_{32} + M_{34} = 0}$$

$$\boxed{M_{43} + M_{45} = 0}$$



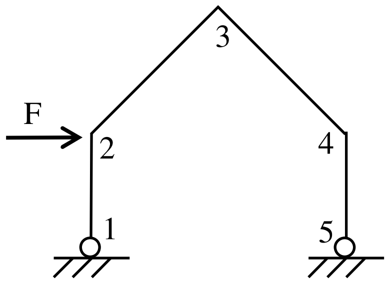
(S_1)

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_{12}\right)}{\delta\Omega^*_{12}} = 0$$

$$\boxed{-\left(M_2 + M_{21}\right) + \frac{M_{23} + M_{32}}{2} - \frac{M_{34} + M_{43}}{2} - FL = 0}$$

$$-\frac{W^*_{ext}\left(\delta\Omega^*_{45}\right)}{\delta\Omega^*_{45}} = 0$$

$$\boxed{-\frac{M_{23} + M_{32}}{2} + \frac{M_{34} + M_{43}}{2} - \left(M_{45} + M_{54}\right) = 0}$$



(S_2)

7 inconnues cinématiques

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, U_2, U_4$

5 après substitution

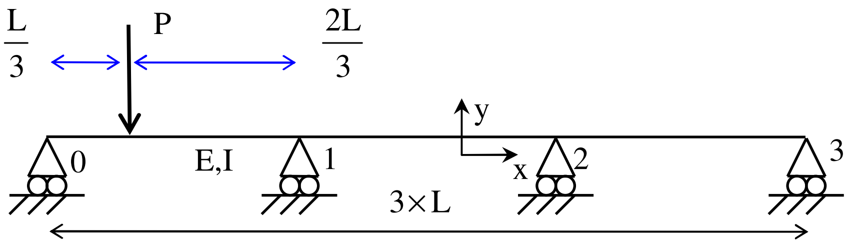
$\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, U_2, U_4$ ou

$\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_{12}, \Omega_{45}$

Les équations sont identiques au cas (S_2)

Seules les expressions de M_{21} et M_{45} changent

Partie II : Méthode des forces (6 pts)



Formule des 3 moments $i = 1$

$$\omega_2' = 0$$

$$\omega_1'' = \frac{P\frac{L}{3}\frac{2L}{3}\frac{4L}{3}}{6EIL} = \frac{PL^2}{6EI}\frac{8}{27} = \frac{4}{81}\frac{PL^2}{EI}$$

$$4LM_1 + LM_2 = -6EI\frac{4}{81}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{8}{27}PL^2$$

$$\boxed{4M_1 + M_2 = -\frac{8}{27}PL}$$

Formule des 3 moments $i = 2$

$$\omega_3' = \omega_2'' = 0$$

$$LM_1 + 4LM_2 = 0$$

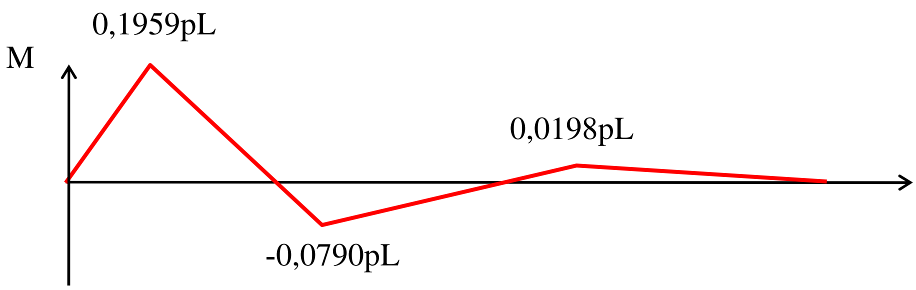
$$\boxed{M_1 + 4M_2 = 0}$$

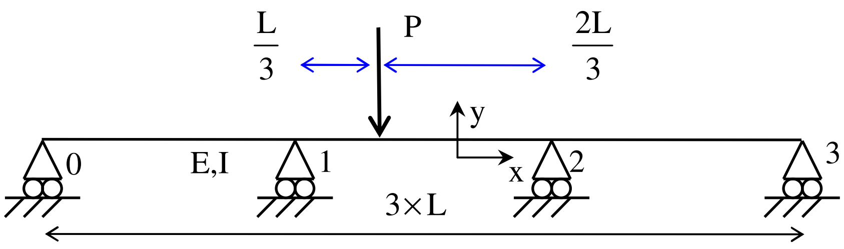
$$4M_1 - \frac{M_1}{4} = -\frac{8}{27}PL$$

$$\frac{15}{4}M_1 = -\frac{8}{27}PL$$

$$\boxed{M_1 = -\frac{32}{405}PL} \quad \boxed{M_2 = \frac{8}{405}PL}$$

Travée 1 : $M_{max} = -\frac{1}{3}\frac{32}{405}PL + \frac{2}{9}PL = \frac{238}{1215}PL = 0{,}1959PL$





Formule des 3 moments $i=1$

$$\omega_2' = -\frac{P\frac{L}{3}\frac{2L}{3}\frac{5L}{3}}{6EIL} = -\frac{PL^2}{6EI}\frac{10}{27} = -\frac{5}{81}\frac{PL^2}{EI}$$

$$\omega_1'' = 0$$

$$4LM_1 + LM_2 = -6EI\frac{5}{81}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{10}{27}PL^2$$

$$\boxed{4M_1 + M_2 = -\frac{10}{27}PL}$$

Formule des 3 moments $i=2$

$$\omega_3' = 0$$

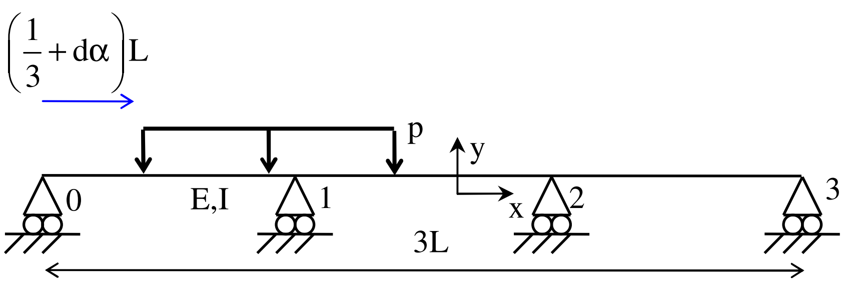
$$\omega_2'' = \frac{4}{81}\frac{PL^2}{EI}$$

$$LM_1 + 4LM_2 = -6EI\frac{4}{81}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{8}{27}PL^2$$

$$\boxed{M_1 + 4M_2 = -\frac{8}{27}PL}$$

$$15M_1 = -\frac{32}{27}PL$$

$$\boxed{M_1 = -\frac{32}{405}PL} \quad \boxed{M_2 = \frac{8}{405}PL - \frac{2}{27}PL = -\frac{22}{405}PL}$$

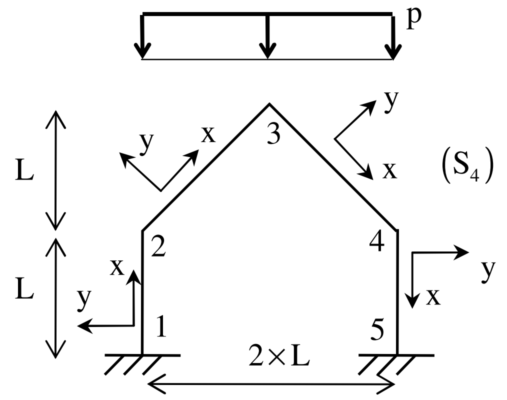


$$M_1\left(\frac{1}{3}+d\alpha\right) = M_1\left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{32}{405}pd\alpha L\right) + \left(-\frac{32}{405}pd\alpha L\right)$$

$$M_1\left(\frac{1}{3}+d\alpha\right) = M_1\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{dM_1}{d\alpha}\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \text{ nous avons un optimum}$$

Partie III : Méthode des rotations (7 pts)



La symétrie nous ramène à 2 degrés de liberté :

$\Omega_2 = -\Omega_4 \qquad \Omega_1 = \Omega_3 = \Omega_5 = 0$

$\Omega_{12} = -\Omega_{23} = \Omega_{34} = -\Omega_{45} = \Omega$

$$M_{12} = \frac{2EI}{L}\Omega_2 - \frac{6EI}{L}\Omega \qquad M_{21} = \frac{4EI}{L}\Omega_2 - \frac{6EI}{L}\Omega$$

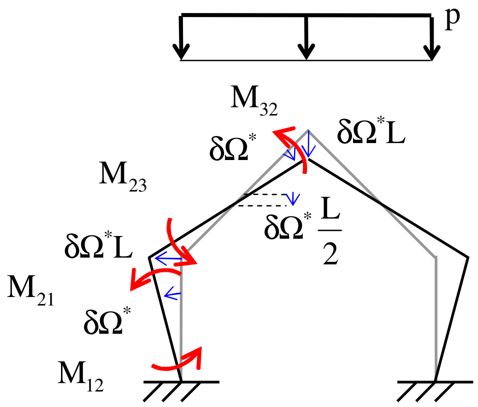
$$M_{23} = \frac{4EI}{\sqrt{2}L}\Omega_2 + \frac{6EI}{\sqrt{2}L}\Omega + \frac{pL^2}{12} \qquad M_{32} = \frac{2EI}{\sqrt{2}L}\Omega_2 + \frac{6EI}{\sqrt{2}L}\Omega - \frac{pL^2}{12}$$

$$M_{23} = 2\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega_2 + 3\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega + \frac{pL^2}{12} \qquad M_{32} = \sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega_2 + 3\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega - \frac{pL^2}{12}$$

Equation relative à Ω_2 :

$$\boxed{M_{21} + M_{23} = 0}$$

Equation relative à Ω :



$$(M_{12} + M_{21})\delta\Omega^* - (M_{23} + M_{32})\delta\Omega^* + pL\delta\Omega^*\frac{L}{2} = 0$$

$$\boxed{-M_{12} - M_{21} + M_{23} + M_{32} - \frac{pL^2}{2} = 0}$$

Système linéaire :

$$\begin{cases} \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\Omega_2 + \left(-6 + 3\sqrt{2}\right)\Omega + \dfrac{pL^3}{12EI} = 0 \\ \left(-6 + 3\sqrt{2}\right)\Omega_2 + \left(12 + 6\sqrt{2}\right)\Omega - \dfrac{pL^2}{2EI} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4+2\sqrt{2} & -6+3\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{2} & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \Omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{pL^3}{12EI}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_2 \\ \Omega \end{bmatrix}=\frac{1}{6+28\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4+2\sqrt{2} & 6-3\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{pL^3}{12EI}$$

$$\begin{cases} \dfrac{EI}{L}\Omega_2=\dfrac{8-8\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\dfrac{pL^2}{12} \\ \dfrac{EI}{L}\Omega=\dfrac{6+5\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\dfrac{pL^2}{12} \end{cases}$$

$$M_{12}=\frac{2EI}{L}\Omega_2-\frac{6EI}{L}\Omega$$

$$M_{12}=2\frac{8-8\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}-6\frac{6+5\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{12}=\frac{-20-46\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}$$

$$\boxed{M_{12}=-0{,}155pL^2}$$

$$M_{21}=\frac{4EI}{L}\Omega_2-\frac{6EI}{L}\Omega$$

$$M_{21}=4\frac{8-8\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}-6\frac{6+5\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{21}=\frac{-4-62\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}$$

$$\boxed{M_{21}=-0{,}168pL^2}$$

$$M_{23}=2\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega_2+3\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega+\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{23}=2\sqrt{2}\frac{8-8\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}+3\sqrt{2}\frac{6+5\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}+\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{23}=\frac{4+62\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}$$

$$\boxed{M_{23}=0{,}168pL^2}$$

$$M_{32}=\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega_2+3\sqrt{2}\frac{EI}{L}\Omega-\frac{pL^2}{12}$$

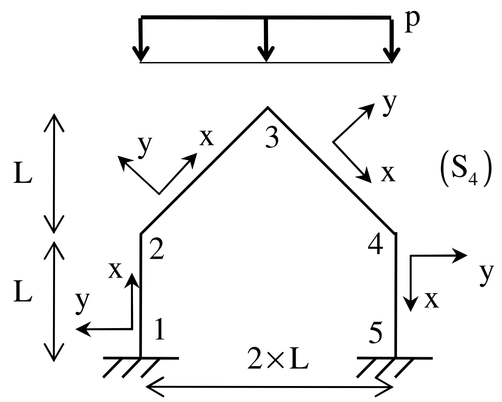
$$M_{32}=\sqrt{2}\frac{8-8\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}+3\sqrt{2}\frac{6+5\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}-\frac{pL^2}{12}$$

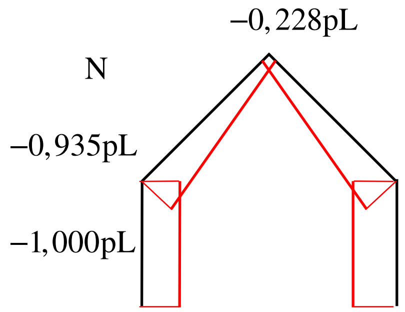
$$M_{32}=\frac{8-2\sqrt{2}}{6+28\sqrt{2}}\frac{pL^2}{12}$$

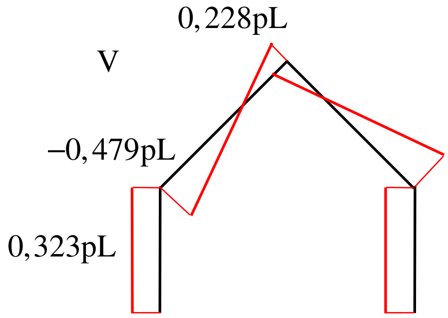
$$\boxed{M_{32}=0{,}009pL^2}$$

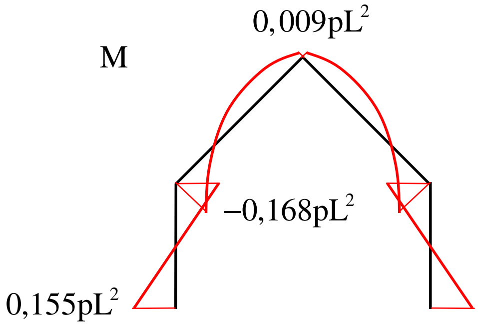
Document Réponse :

Partie III : Méthode des rotations









Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

Etude de la structure (S_4) de la partie III

Répondre entièrement sur le **Doc Réponse**

La matrice de rigidité globale change-t-elle si on néglige ou pas les déformations d'effort normal ?

Oui, les termes changent mais la taille reste identique

La matrice de rigidité globale change-t-elle si on change la numérotation des nœuds ?

Oui, on a même intérêt pour avoir une matrice le plus « bande » possible.

Est-elle toujours inversible ?

Non, si le problème de départ était un mécanisme

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :

Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

$5\times 3 = 15$ (2D)

Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système

$15 - 2\times 3 = 9$ (2D)

Comment interpréter un second membre nul ?

Il n'y a pas de cas de charge