Test ALCR

Problème I :

1) ensemble des champs statiquement admissible :

$$S = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \,/\, \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \,,\ \underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ continue}, \right.$$
$$\text{sur } (OA) : \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_y} \,/\!/\, \underline{e_y}$$
$$\text{sur } (OB) : \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_x} \,/\!/\, \underline{e_x}$$
$$\left. \text{sur } (AB) : \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_r} = \underline{0} \right\}$$

19

ensemble des champs cinématiquement admissible :

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{V} \,/\, \underline{V}\ C^0, C^1 \text{ par morceau}, \right.$$
$$\text{sur } (OA) : \underline{V} \cdot \underline{e_y} = 0$$
$$\left. \text{sur } (OB) : \underline{V} \cdot \underline{e_x} = -wy . \right\}$$

2) $$\mathcal{P}_{ext} = \int_V \rho \cancel{\underline{F}}^{\,0} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{\partial V} \underline{T} \cdot \underline{v} \, dS$$

$$= \int_{OB} \sigma_{xx} (-wy) \, dS$$

$$= w \int_{OB} -\sigma_{xx} y \, dS$$

$$\Rightarrow M = \int_{OB} -\sigma_{xx} y \, dS$$

nature de M ?

3) Approche cinématique :

3,1) * vérification de C.A. :

$$\text{sur } (OA) : \underline{V} \cdot \underline{e_y} = 0 \iff \underline{V} \cdot \underline{e_\theta} = \frac{2\theta r}{\pi} w = 0 \quad \text{ok}$$

$$\text{sur } (OB) : \underline{V} \cdot \underline{e_x} = -wy \iff \underline{V} \cdot \underline{e_\theta} = wr$$
$$U_\theta = \frac{2 \frac{\pi}{2} r}{\pi} w = wr \quad \text{ok}$$

$\Rightarrow \underline{V}$ est cinématiquement admissible

* vérification de la pertinence : $tr(\underline{\underline{d}}) = 0$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{v} + {}^{t}\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\, \underline{v} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{\pi} & -\frac{2\omega}{\pi}\theta & 0 \\ \frac{2\omega}{\pi}\theta & \frac{\omega}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{2\omega}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\omega}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{v} + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{v}\right)$$

$\text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0$ ok $\longrightarrow$ $\underline{V}$ est pertinent.

3,2) $P_{rm} = \int_V \pi(\underline{\underline{d}})\,dV + \int_\Sigma \pi(\underline{n}\cdot[\![\underline{V}]\!]^{\,0})\,dS$

$= \int_V \pi(\underline{\underline{d}})\,dV$

$= \int_V C\frac{4\omega}{\pi}\,dV = \frac{\cancel{4}\,2\,\omega C}{\pi}\cdot\frac{\pi R^2}{4}$

$\Rightarrow P_{rm} = \omega C \cancel{R^2}$ 2

$P_{ext} \leq P_{rm}$

$M\omega \leq \omega C R^2$

$M \leq CR^2$

$\Rightarrow \boxed{M^+ \leq CR^2}$ 2

4) Approche statique par l'intérieur.

4,1) les équations d'équilibre : $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$

- suivant $\underline{e}_r$: $\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2C}{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{2C}{r}$

- suivant $\underline{e}_\theta$: $0 = 0$

- suivant $\underline{e}_z$: $0 = 0$

les C.L. :

- sur (OA) : $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e}_\theta \,/\!/\, \underline{e}_\theta$ ok

- sur (OB) : $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e}_\theta \,/\!/\, \underline{e}_\theta$ ok

- sur (AB) : $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e}_r = \underline{0} \Rightarrow \sigma_{rr}(r=R) = 0$

on suppose que $\sigma_{rr}(r) = \int \frac{2C}{r} dr + cst$

$= 2C\ln r + cst$

en $r = R$, $\sigma_{rr}(r=R) = 0 \Rightarrow cst = -2C\ln R$

$\Rightarrow \sigma_{rr}(r) = 2C\ln r - 2C\ln R$

le critère de résistance (TRESCA)

$F(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2C = \sigma_{\theta\theta}(r) - \sigma_{rr}(r) - 2C = 0 \leq 0$ ok

4,2) $M = \int_{OB} \sigma_{\theta\theta} \cdot r \, dS = \int_{OB} (2C\ln r - 2C\ln R \overset{+2C}{)} r \, dS$

$= 2C \int_{OB} r\ln r \, dr - 2C\ln R \int_{OB} r \, dr$ $\quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2C$

$= 2C\left(\frac{R^2}{2}\ln R - \frac{R^2}{4}\right) - 2C\ln R \cdot \frac{R^2}{2}$

$= 2CR^2 \cancel{\ln R} + \frac{CR^2}{2}$

$$\boxed{M^+ \geq 2CR^2 \cancel{\ln R} + \frac{CR^2}{2}}$$

Question bonus :

* approche cinématique :

les vérification de C.A. et de la pertinence sont pareilles que question (3,1)

$P_{rm} = \int_V \pi(\underline{\underline{d}}) dV + \int_\Sigma \pi(\underline{n} \cancel{[\![\underline{V}]\!]}^{0}) dS$

$= \int_V k\sqrt{2 \,tr\, \underline{\underline{d}}^2} \, dV$

$= \frac{\cancel{4}^{\,2} \omega k}{\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \omega k R^2$

$P_{ext} \leq P_{rm} \Rightarrow M\omega \leq \omega k R^2$

$M \leq kR^2$

$$\boxed{M^+ \leq kR^2} \quad 2$$

* approche statique :

les équations d'équilibre et C.L. sont même $\Rightarrow$ même $\sigma_{rr}(r) = 2C\ln r - 2C\ln$

le critère VON MISES. $F(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2} tr\, \underline{\underline{s}}^2} - k \leq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} tr\, \underline{\underline{s}}^2} \leq k$

$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}(tr\,\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} -C & \\ & C \end{pmatrix}$

$\sqrt{C^2} \leq k$

$\boxed{-k \leq C \leq k.}$

$M = \int_{OB} \sigma_{\theta\theta} r \, dS$

$= 2CR^2\ln R + \frac{C}{...}$

$\boxed{M^+ \geq 2kR^2\ln R + \frac{kR^2}{...}}$

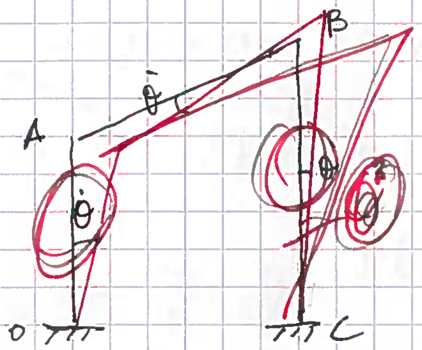
Exercice n°1

1) nb. de S.P.C $= 4$ (O, A, B, C)

degré d'hyperstaticité en moment $= 3$

$\Rightarrow$ nb. de mécanisme $= 4 - 3 = 1$

2) on propose une mécanisme suivante :



$[\![\dot\theta_O]\!] = -\dot\theta - 0 = -\dot\theta$

$[\![\dot\theta_A]\!] = \dot\theta - (-\dot\theta) = 2\dot\theta$

$[\![\dot\theta_B]\!] = -\dot\theta - \dot\theta = -2\dot\theta$

$[\![\dot\theta_C]\!] = 0 - (-\dot\theta) = \dot\theta$

$P_{ext} = QH\dot\theta$

$P_{rm} = m\left(|\dot\theta| + 2|\dot\theta| + 2|\dot\theta| + |\dot\theta|\right) = 6m|\dot\theta|$

$P_{ext} \leq P_{rm} \Rightarrow QH\dot\theta \leq 6m|\dot\theta|$

$Q \leq \frac{6m}{H}$

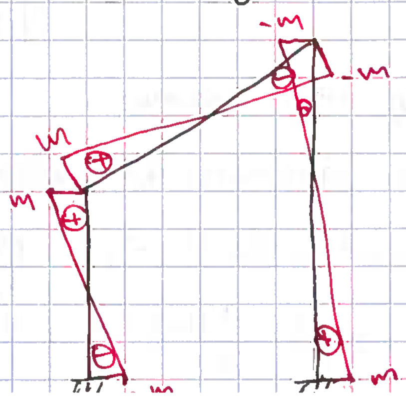
$\Rightarrow \boxed{Q^+ = \frac{6m}{H}}$

3) $P_{ext} = P_{dissipée} \Rightarrow QH\dot\theta = \dot\theta\left(-M_O + 2M_A - 2M_B + M_C\right)$

$6m = \underset{<0}{-M_O} + \underset{>0}{2M_A} - \underset{<0}{2M_B} + \underset{>0}{M_C}$

$\Rightarrow \begin{cases} M_O = -m \\ M_A = m \\ M_B = -m \\ M_C = m \end{cases}$

Mécanisme !



Exercice n°2

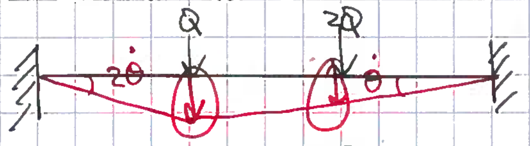
nb. S.P.C $= 4$ (2 encastrements et 2 endroits ou les force sont appliquées)

d° h en moment $= 2$

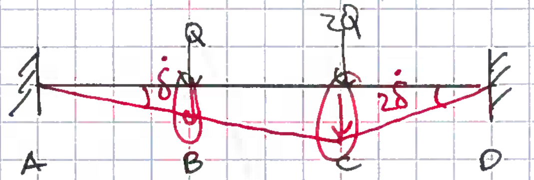
$\Rightarrow$ nb. mécanisme $= 4 - 2 = 2$

on propose 2 mécanismes suivantes :

Méca ① :



Méca ② :



	A	B	C	D	P_{ext}
Méca ①	$-2\dot\theta$	$3\dot\theta$	0	$-\dot\theta$	$Ql\cdot 2\dot\theta + 2Q\cdot l\cdot\dot\theta = 4Ql\dot\theta$
Méca ②	$-\dot\delta$	0	$3\dot\delta$	$-2\dot\delta$	$\cancel{4Ql\dot\delta}$ $\cancel{Ql\dot\delta + 2Ql\,2\dot\delta = 5Ql\dot\delta}$
①+②	$-(2\dot\theta+\dot\delta)$	$3\dot\theta$	$3\dot\delta$	$-(\dot\theta+2\dot\delta)$	$\cancel{4Ql(\dot\theta+\dot\delta)}$

$$P_{rm} = \sum_i m\,|[\dot\theta_i]| = m\left(|2\dot\theta+\dot\delta| + 3|\dot\theta| + 3|\dot\delta| + |\dot\theta+2\dot\delta|\right)$$

$$P_{ext} \leq P_{rm} \Rightarrow 4Ql(\dot\theta+\dot\delta) \leq m\left(|2\dot\theta+\dot\delta| + 3|\dot\theta| + 3|\dot\delta| + |\dot\theta+2\dot\delta|\right)$$

changement de variable : $\dot\theta + \dot\delta = 1 \Rightarrow \dot\delta = 1 - \dot\theta$

$$\Rightarrow 4Ql \leq m\,(\underbrace{|1+\dot\theta| + 3|\dot\theta| + 3|1-\dot\theta| + |2-\dot\theta|}_{f(\dot\theta)})$$

$f(\dot\theta)$ minimise en $\dot\theta = -1$, $\boxed{0,\ 1,}$ 2

$f(\dot\theta) = 12$, $\boxed{6,\ 6,}$ 12

$\Rightarrow 4Ql \leq 6m$

$Q \leq \frac{3}{2}\frac{m}{l}$

$$\boxed{Q^+ = \frac{3}{2}\frac{m}{l}}$$