Questions de cours

1. À quoi équivaut le théorème de Cauchy (réciprocité des contraintes tangentielles) ?

   Le théorème de Cauchy équivaut à la symétrie de la matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy.

2. Citer deux matériaux obéissant au critère de limite élastique de Mohr-Coulomb.

   Ce critère s'applique aux matériaux granulaires tels que le sable ou l'argile.

Premier exercice : État homogène de contrainte plane

Un état homogène de contrainte plane est défini par

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 2a & a \end{bmatrix}$$

où a est une constante strictement positive de dimension $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$.

1. Déterminer les contraintes principales et les directions principales de contrainte associées.

   Comme les termes diagonaux de la matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont égaux, les directions principales dans le plan de contrainte sont $\vec{j_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1} + \vec{e_2})$, associée à la contrainte principale $\sigma_1 = a + 2a = 3a$, et $\vec{j_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e_1} + \vec{e_2})$, associée à la contrainte principale $\sigma_2 = a - 2a = -a$. La troisième direction principale de contrainte est quant à elle $\vec{j_3} = \vec{e_3}$, associée à la contrainte principale $\sigma_3 = 0$.

2. Donner la décomposition de $\boldsymbol{\sigma}$ en parties isotrope et déviatorique.

   Comme $\sigma_m = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = a$, l'on a

   $$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2a \\ 2a & 0 \end{bmatrix}$$

3. Cet état de contrainte est soumis à une plaque métallique présentant une fissure rectiligne. Comment doit-on orienter cette fissure si l'on veut empêcher sa propagation ?

   Pour empêcher la propagation de la fissure, il faut en comprimer les lèvres, et donc l'orienter selon $\vec{j_1}$.

4. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Von-Mises, quelle est, en fonction de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur maximale de a ?

   De

   $$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \le \sqrt{2}\sigma_0$$

   l'on tire

   $$\sqrt{(3a - (-a))^2 + (3a)^2 + (-a)^2} \le \sqrt{2}\sigma_0$$

   ce qui donne $\sqrt{26a^2} \le \sqrt{2}\sigma_0$, soit $a \le \frac{\sigma_0}{\sqrt{13}}$.

Second exercice : Sollicitation thermomécanique d'une poutre hétérogène

La poutre de longueur l et de section droite de hauteur h et de largeur b représentée sur la figure 1 est constituée d'un matériau hétérogène et non pesant, au comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young variable $E = E_0(1 + \frac{x_1}{l})$ et de coefficient de dilatation thermique linéaire

β. Cette poutre est soumise à une variation de température positive $\Delta T = T - T_0$, sa longueur étant par ailleurs maintenue constante. Enfin, les parois latérales sont libres et les conditions de l'expérience idéales (i.e. absence de frottement entre les extrémités gauche et droite de la poutre et les embases maintenant sa longueur constante).

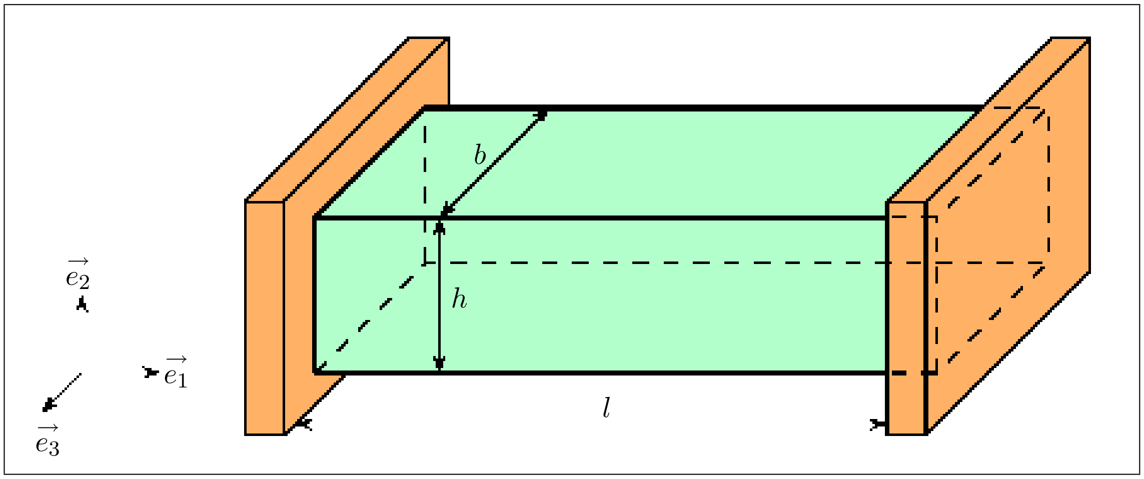

FIG. 1 – Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique

1. Justifier que la matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy adopte la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où σ_1 est une constante à déterminer.

Les parois latérales étant libres et les conditions de l'expérience idéales, la seule composante non nulle de la matrice représentative du tenseur des contraintes de Cauchy est la contrainte normale sur les facettes de normale $\vec{e_1}$.

2. Montrer que le déplacement horizontal u_1 des sections droites de la poutre est donné par $u_1(x_1) = \sigma_1 \frac{l}{E_0} \ln(1 + \frac{x_1}{l}) + \beta \Delta T x_1$

La matrice représentative du tenseur linéarisé des petites déformations adopte la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

et l'on a donc

$$u_1'(x_1) = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \beta \Delta T = \frac{\sigma_1}{E_0(1 + \frac{x_1}{l})} + \beta \Delta T$$

ce qui donne, puisque $u_1(0) = 0$, $u_1(x_1) = \sigma_1 \frac{l}{E_0} \ln(1 + \frac{x_1}{l}) + \beta \Delta T x_1$

3. Déterminer σ_1 en tirant parti de la condition aux limites à l'extrémité droite de la poutre. En déduire alors l'expression finale de u_1.

De $u_1(l) = 0$ l'on tire $\sigma_1 \frac{l}{E_0} \ln 2 + \beta \Delta T l = 0$ et l'on en déduit alors $\sigma_1 = -\frac{E_0}{\ln 2} \beta \Delta T$ si bien que l'on a, finalement $u_1(x_1) = (x_1 - l \frac{\ln(1+\frac{x_1}{l})}{\ln 2}) \beta \Delta T$

Petit problème : Cylindre en rotation

Un cylindre de révolution métallique de rayon R est mis en rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire ω. Le métal, de masse volumique ρ, a un comprtement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. Le champ des déplacements, exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ **lié au cylindre** et associé au système de coordonnées (r, θ, z) adopte alors la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$, où u est une fonction de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner en fonction de u, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, puis du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

   Les seules composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont $\varepsilon_{rr} = u'(r)$ et $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u(r)}{r}$. Comme $\nu = 0$, l'on a alors $\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon}$, de sorte que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont $\sigma_{rr} = Eu'(r)$ et $\sigma_{\theta\theta} = E\frac{u(r)}{r}$.

2. Les forces gravifiques étant négligées, justifier que le cylindre est soumis au champ d'actions mécaniques extérieures à distance $\mathbf{b} = \omega^2 r\,\vec{e_r}$.

   Dans le repère lié au cylindre en mouvement et en l'absence d'actions gravifiques, ce dernier est soumis au seul champ de forces centrifuges $\mathbf{b} = \omega^2 r\,\vec{e_r}$.

3. Des équations indéfinies de l'équilibre déduire que u est solution de l'équation différentielle ordinaire

   $$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E} r \qquad (1)$$

   La seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite est celle en projection sur $\vec{e_r}$ et se réduit ici à $\partial_r \sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r = 0$, ce qui donne

   $$Eu''(r) + \frac{Eu'(r) - E\frac{u(r)}{r}}{r} + \rho\omega^2 r = 0$$

   et donc $u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E} r$.

4. Montrer que l'équation homogène $u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = 0$ a pour solution générale $u(r) = Ar + \frac{B}{r}$, où A et B sont deux constantes arbitraires, puis chercher une solution particulière de l'équation (1) de la forme $u(r) = ar^\alpha$. En déduire alors, en fonction de A, B, ρ, ω, E et r, la solution génrérale de cette équation.

   En cherchant des solutions de l'équation homogène de la forme $u(r) = r^\alpha$, avec α un réel ou un complexe donné, l'on a, puisqu'alors $u'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$ et $u''(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$,

   $$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1)r^{\alpha-2} = (\alpha^2 - 1)r^{\alpha-2} = 0$$

   ce qui impose $\alpha = \pm 1$, si bien que cette équation homogène a pour solution générale $u(r) = Ar + \frac{B}{r}$, où A et B sont deux constantes arbitraires. En cherchant ensuite une solution particulière de l'équation (1) de la forme $u(r) = ar^\alpha$, l'on obtient cette fois $(\alpha^2 - 1)ar^{\alpha-2} = -\frac{\rho\omega^2}{E} r$, ce qui impose $\alpha = 3$ puis $a = -\frac{\rho\omega^2}{(\alpha^2-1)E} = -\frac{\rho\omega^2}{8E}$. Ainsi, l'équation (1) a pour solution générale $u(r) = Ar + \frac{B}{r} - \frac{\rho\omega^2}{8E} r^3$, avec A et B sont deux constantes arbitraires.

5. Déterminer les constantes A et B en tirant parti des conditions aux limites en $r = 0$ et $r = R$. En déduire alors l'expression finale de u.

   Comme $u(0) = 0$, l'on a nécessairement $B = 0$, de sorte que l'on a déjà $u(r) = Ar - \frac{\rho\omega^2}{8E} r^3$. Ensuite, de $\sigma_{rr}(R) = Eu'(R) = 0$ l'on tire $u'(R) = 0$, ce qui donne $A = \frac{3\rho\omega^2}{8E} R^2$. Ainsi, l'on a finalement $u(r) = \frac{\rho\omega^2}{8E}(3R^2 r - r^3)$.

6. **Bonus** Le métal obéissant au critère de limite élastique de Tresca, donner, en fonction de R, ρ et de la limite élastique en traction simple σ_0, l'expression de la vitesse angulaire ω_l à ne pas dépasser si l'on veut éviter de plastifier le cylindre.

   Les contraintes principales sont

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \sigma_1 & = & \sigma_{rr} & = & Eu'(r) & = & \frac{\rho\omega^2}{8}(3R^2 - 3r^2) \\ \sigma_2 & = & \sigma_{\theta\theta} & = & E\frac{u(r)}{r} & = & \frac{\rho\omega^2}{8}(3R^2 - r^2) \\ \sigma_3 & = & \sigma_{zz} & = & 0 & & \end{array}\right.$$

   et l'on a donc

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} = \frac{\rho\omega^2}{8}\max\{2r^2, 3R^2 - 3r^2, 3R^2 - r^2\} = \frac{\rho\omega^2}{8}(3R^2 - r^2)$$

   Le critère de Tresca impose alors $\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} = \frac{\rho\omega^2}{8}(3R^2 - r^2) \leq \sigma_0$ pour tout r compris entre 0 et R, ce qui donne $\frac{3\rho\omega^2}{8}R^2 \leq \sigma_0$. Ainsi, la vitesse angulaire ω_l à ne pas dépasser si l'on veut éviter de plastifier le cylindre vaut $\omega_l = \sqrt{\frac{8\sigma_0}{3\rho R^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2\sigma_0}{3\rho}}$.

   Application numérique $R = 1\,\mathrm{m}$, $\sigma_0 = 628\,\mathrm{MPa}$, $\rho = 7850\,\mathrm{kg.m^{-3}}$.

   L'on a $\omega_l = \frac{2}{1}\sqrt{\frac{2\times 628\,10^6}{3\times 7850}} = 2\sqrt{\frac{4\,10^6}{75}} = \frac{4\,10^3}{5\sqrt{3}} = \frac{800}{\sqrt{3}} \approx 462$.