Premier problème : Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance

Une poutre de longueur l et de sections droites rectangulaires de mêmes dimensions et d'aire S (figure 1) est consituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ, au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. La poutre, encastrée à son extrémité gauche $x = 0$ et libre à son extrémité droite $x = l$, est soumise à la densité massique d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b} = ax^3\,\overrightarrow{e_x}$, où a est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{-2}$. On suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u(x)\,\overrightarrow{e_x}$, où $\overrightarrow{e_x}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe Ox, et où u est une fonction de x que l'on se propose de déterminer.

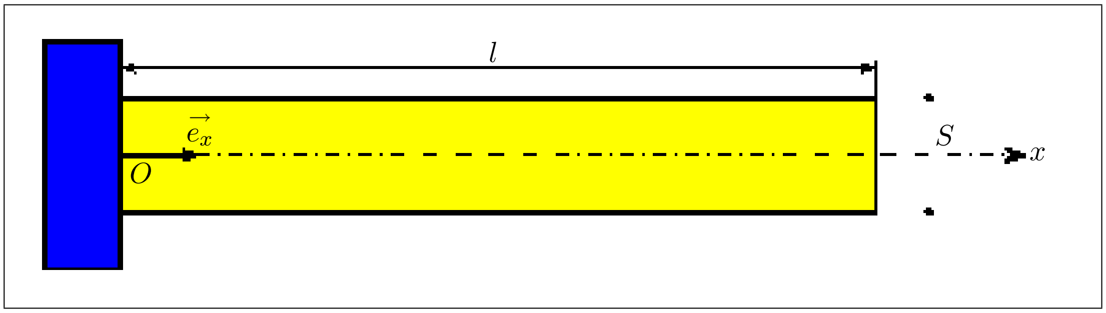

Fig. 1 – Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance

1. Des équations de Lamé-Navier déduire l'équation différentielle ordinaire dont u est solution.

   L'on a $\mathbf{rot}_x\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathrm{div}_x\mathbf{u} = u'(x)$, $\mathbf{grad}_x\mathrm{div}_x\mathbf{u} = u''(x)\,\overrightarrow{e_x}$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, $\lambda = 0$ et $\mu = E$, de sorte que les équations de Lamé-Navier se réduisent ici à

   $$Eu''(x) + \rho a x^3 = 0$$

2. Résoudre l'équation précédente en tirant parti des conditions aux limites statique en $x = l$ et cinématique en $x = 0$.

   L'on a $u''(x) = -\frac{\rho a}{E}x^3$ ainsi que $\sigma_{xx}(l) = Eu'(l) = 0$, et donc $u'(l) = 0$, si bien que l'on obtient $u'(x) = \frac{\rho a}{4E}(l^4 - x^4)$. Enfin, de $u(0) = 0$ l'on déduit que $u(x) = \frac{\rho a}{4E}(l^4 x - \frac{x^5}{5})$. En particulier, l'on a $u(l) = \frac{\rho a l^5}{5E}$.

3. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, de limite élastique en traction simple σ_0, quelle est la valeur de a à ne pas dépasser si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques ?

   L'on doit avoir, pour tout x compris entre 0 et l, $\sigma_{xx}(x) = Eu'(x) = \frac{\rho a}{4}(l^4 - x^4) \leq \sigma_0$, ce qui impose $\frac{\rho a l^4}{4} \leq \sigma_0$, c'est-à-dire $a \leq \frac{4\sigma_0}{\rho l^4}$.

On se propose, dans ce qui suit, d'exhiber une solution (*a priori* approchée) grâce au théorème de l'énergie potentielle[1].

4. On pose $u(x) = \alpha x$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $J(\alpha)$ et dire quelle valeur de α la minimise. Quel est alors le déplacement en $x = l$? (on comparera ce dernier avec la valeur exacte trouvée à la question 2). En quoi cette solution n'est pas satisfaisante ?

[1] L'énergie potentielle d'un solide dans un champ de déplacement virtuel est égale à la différence entre son énergie de déformation élastique et le travail, dans ce champ, des actions mécaniques extérieures.

Les seules composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont $\varepsilon_{xx} = u'(x) = \alpha$ et $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E\alpha$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^l \frac{1}{2}E\alpha^2 S \,\mathrm{d}x - \int_0^l \rho a x^3 \alpha x S \,\mathrm{d}x \\ &= S\left(\frac{1}{2}E\alpha^2 l - \frac{1}{5}\rho a \alpha l^5\right) \end{aligned}$$

Comme $J'(\alpha) = S(E\alpha l - \frac{1}{5}\rho a l^5)$, La valeur de α minimisant l'énergie potentielle $J(\alpha)$, solution de l'équation $J'(\alpha) = 0$, vaut $\alpha = \frac{\rho a l^4}{5E}$. L'on a alors $u(x) = \frac{\rho a l^4}{5E}x$, si bien que cette solution approchée ne coïncide avec la solution exacte qu'en $x = 0$ et $x = l$.

5. On pose à présent $u(x) = \alpha x + \beta x^5$. Calculer $J(\alpha, \beta)$, et montrer que l'on obtient alors la solution trouvée à la question 2.

Les seules composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont à présent $\varepsilon_{xx} = u'(x) = \alpha + 5\beta x^4$ et $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(\alpha + 5\beta x^4)$, si bien que l'on a

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_0^l \frac{1}{2}E(\alpha + 5\beta x^4)^2 S \,\mathrm{d}x - \int_0^l \rho a x^3 (\alpha x + \beta x^5) S \,\mathrm{d}x \\ &= S\left(\frac{1}{2}E\left(\alpha^2 l + 2\alpha\beta l^5 + \frac{25}{9}\beta^2 l^9\right) - \frac{1}{5}\rho a \alpha l^5 - \frac{1}{9}\rho a \beta l^9\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = S(E(\alpha l + \beta l^5) - \frac{1}{5}\rho a l^5)$ et que $\frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = S(E(\alpha l^5 + \frac{25}{9}\beta l^9) - \frac{1}{9}\rho a l^9)$, Les valeurs de α et β minimisant l'énergie potentielle $J(\alpha, \beta)$, solutions du système d'équations $\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 0$, satisfont

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha & + & \beta l^4 & = & \frac{\rho a}{5E} l^4 \\ \alpha & + & \frac{25}{9}\beta l^4 & = & \frac{\rho a}{9E} l^4 \end{array} \right.$$

L'on en déduit alors $\beta = \frac{-1}{20}\frac{\rho a}{E}$ puis $\alpha = \frac{\rho a l^4}{4E}$, de sorte que $u(x) = \frac{\rho a l^4}{4E}x - \frac{\rho a}{20E}x^5$, et que cette solution approchée coïncide cette fois avec la solution exacte.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Dire, sans faire de calculs mais en le justifiant, ce que l'on obtiendrait en posant $u(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x^k$.

Comme la solution exacte appartient à l'espace d'approximation, la solution approchée est, là encore, identique à cette dernière, de sorte que l'on obtiendrait $\alpha_1 = \frac{\rho a l^4}{4E}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = \frac{-1}{20}\frac{\rho a}{E}$ et $\alpha_k = 0$ pour tout entier k strictement supérieur à 5.

Second problème : Écoulement d'un fluide visqueux newtonien entre deux plaques

L'axe Ox_2 étant vertical ascendant, un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique de cisaillement η, occupe l'espace physique compris entre deux plaques horizontales. La première plaque, $(P1)$, située dans le plan $x_2 = 0$, est fixe, tandis que la seconde, $(P2)$, située dans le plan $x_2 = H$, avec H une constante strictement positive, est animée d'un mouvement de translation dans la direction horizontale Ox_1, de vitesse v_0. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, l'on admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le global $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ associé au système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) adopte la forme $\mathbf{v} = v(x_1, x_2)\overrightarrow{e_1}$, où v est une fonction inconnue dépendant, *a priori*, des variables d'espace x_1 et x_2.

1. Montrer qu'en fait v ne dépend que de x_2.

   Comme le fluide est icompressible, l'on a $\mathrm{div}_x \mathbf{v} = 0$, et l'on et déduit alors $\partial_1 v = 0$, ce qui montre que v ne dépend que de x_2.

2. Des équations de Navier-Stokes déduire que la pression p est indépendante de x_2 et de x_3 et que son gradient est constant. On pose alors, dans tout ce qui suit, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1} = -G$ et l'on choisit $G > 0$, de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des x_1 positifs.

   Les particules fluides étant animées d'un mouvement rectiligne uniforme, le champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$ est nul. Comme les actions mécaniques à distance sont négligées et que le fluide est incompressible, les équations de Navier-Stokes se réduisent ici à $-\mathbf{grad}_x p - \eta \mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ce qui donne, puisque $\mathbf{rot}_x \mathbf{rot}_x \mathbf{v} = -\partial^2_{22} v(x_2)\, \overrightarrow{e_1}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\partial_1 p(x_1,x_2,x_3) + \eta \partial^2_{22} v(x_2) & = & 0 \\ -\partial_2 p(x_1,x_2,x_3) & = & 0 \\ -\partial_3 p(x_1,x_2,x_3) & = & 0 \end{array}\right.$$

   ce qui montre que la pression p ne dépend que de x_1, et que son gradient $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1} \overrightarrow{e_1}$ est constant.

3. Du résultat obtenu à la question 2 joint aux équations de Navier-Stokes ainsi qu'aux conditions aux limites cinématiques en $x_2 = 0$ et $x_2 = H$ déduire, en fonction de G, η, H et v_0, l'expression de v.

   De $\partial^2_{22} v(x_2) = \frac{1}{\eta} \partial_1 p(x_1) = \frac{-G}{\eta}$ l'on déduit tout d'abord $v(x_2) = \frac{-G}{2\eta} x_2^2 + A x_2 + B$, avec A et B deux constantes arbitraires. De $v(0) = 0$ l'on tire ensuite $B = 0$, puis, de la condition $v(H) = v_0$, $A = \frac{GH}{2\eta} + \frac{v_0}{H}$, de sorte que finalement l'on a, pour tout x_2 compris entre 0 et H,

$$v(x_2) = \frac{GH}{2\eta} x_2 \left(1 - \frac{x_2}{H}\right) + \frac{v_0}{H} x_2$$

4. Donner, en fonction de G, η, H et v_0, l'expression du débit volumique Q du fluide à travers les sections $x_1 =$cste, par unité de largeur dans la direction Ox_3.

   L'on a

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^H v(x_2)\, \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^H \left(\frac{GH}{2\eta} x_2 \left(1 - \frac{x_2}{H}\right) + \frac{v_0}{H} x_2\right) \mathrm{d}x_2 \qquad \text{On pose } u = \tfrac{x_2}{H} \\ &= \frac{GH^3}{2\eta} \int_0^1 u(1-u)\, \mathrm{d}u + v_0 H \int_0^1 u\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

   ce qui donne finalement $Q = \frac{GH^3}{12\eta} + \frac{1}{2} v_0 H$

5. Donner, en fonction de G, η, H et v_0, l'expression des composantes non nulles du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$, puis celles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

   La seule composante non nulle du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation est

$$D_{12} = \frac{1}{2} \partial_2 v(x_2) = \frac{GH}{4\eta} \left(1 - \frac{2x_2}{H}\right) + \frac{v_0}{2H}$$

   si bien que l'on a ensuite, puisque $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 2\eta \mathbf{D}$, $\sigma_{12} = 2\eta D_{12} = \frac{GH}{2}(1 - \frac{2x_2}{H}) + \eta \frac{v_0}{H}$ ainsi que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p(x_1) = G x_1 - p_0$, avec p_0 une constante arbitraire.

6. Des résultats de la question 5 déduire, en fonction de G, η, H et v_0, l'expression des forces de frottement $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qu'exerce, par unité de longueur dans la direction (O, x_1) et de largueur dans la direction (O, x_3), le fluide sur les plaques $(P1)$ et $(P2)$, puis retrouver, grâce au théorème d'Euler, l'expression de leur somme $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

   L'on a $\overrightarrow{F_1} = F_1 \overrightarrow{e_1}$, avec $F_1 = \overrightarrow{e_1} . \boldsymbol{\sigma}(0). \overrightarrow{e_2} = \sigma_{12}(0) = \frac{GH}{2} + \eta \frac{v_0}{H}$ ainsi que $\overrightarrow{F_2} = F_2 \overrightarrow{e_1}$, avec cette fois $F_2 = -\overrightarrow{e_1} . \boldsymbol{\sigma}(H). \overrightarrow{e_2} = -\sigma_{12}(H) = \frac{GH}{2} - \eta \frac{v_0}{H}$, de sorte que $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = GH \overrightarrow{e_1}$.

   Dans tout ce qui suit, nous désignons par $\mathcal{V}$ le volume fluide, de largueur unité dans la direction (O, x_3), compris entre les plans $x_1 = c$ et $x_1 = c + 1$, avec c un réel donné, et par $\mathcal{S}$ sa frontière. Comme le fluide est incompressible et l'écoulement permanent, la résultante de la dérivée partielle par rapport au temps des quantités de mouvement s'exerçant sur le volume $\mathcal{V}$ et nulle. Par ailleurs, le débit de ces mêmes quantités de mouvement à travers $\mathcal{S}$ est également nul puisque la vitesse ne dépend que de la variable d'espace x_2. Ainsi, le théorème d'Euler se réduit ici à la nullité de la résultante des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur $\mathcal{V}$, c'est-à-dire, en l'absence d'actions mécaniques extérieures à distance, à la nullité des actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur $\mathcal{S}$, ce qui donne $p(c)H\overrightarrow{e_1} - p(c+1)H\overrightarrow{e_1} - (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = \overrightarrow{0}$, de sorte que l'on retrouve bien, puisque $p(x_1) = p_0 - Gx_1$, $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = GH \overrightarrow{e_1}$.

7. Des résultats de la question 5 déduire, en fonction de G, η, H et v_0, l'expression de la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ dissipée dans l'écoulement, par unité de longueur dans la direction (O, x_1) et de largueur dans la direction (O, x_3), puis retrouver ce résultat grâce au théorème de l'énergie cinétique.

   On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mathrm{i}} &= \int_0^H 2D_{12}(x_2)\sigma_{12}(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^H 4\eta \left(\frac{GH}{4\eta}\left(1 - \frac{2x_2}{H}\right) + \frac{v_0}{2H} \right)^2 \mathrm{d}x_2 \qquad \text{On pose } u = 2\tfrac{x_2}{H} - 1 \\
&= 2\eta H \int_{-1}^{1} \left(\frac{v_0}{2H} - \frac{GH}{4\eta}u \right)^2 \mathrm{d}u \\
&= 2\eta H \left(\frac{v_0^2}{2H^2} + \frac{G^2H^2}{24\eta^2} \right)
\end{aligned}
$$

   ce qui donne finalement $\mathcal{P}^{\mathrm{i}} = \frac{\eta v_0^2}{H} + \frac{G^2H^3}{12\eta}$. Comme le champ des accélérations est nul, la puissance dynamique s'exerçant sur le volume fluide $\mathcal{V}$ l'est également, de sorte que la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ est égale à celle des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur ce volume, c'est-à-dire, en l'absence d'actions mécaniques extérieures à distance, à celle des actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur $\mathcal{S}$, ce qui donne $\mathcal{P}^{\mathrm{i}} = p(c)Q - p(c+1)Q - F_2 v_0 = GQ - F_2 v_0$, de sorte que l'on retrouve bien, puisque $Q = \frac{GH^3}{12\eta} + \frac{1}{2}v_0 H$ et que $F_2 = \frac{GH}{2} - \eta\frac{v_0}{H}$, $\mathcal{P}^{\mathrm{i}} = \frac{\eta v_0^2}{H} + \frac{G^2H^3}{12\eta}$.