$3^{\text{ème}}$ test d'analyse

Exercice 1 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on pose $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x)\, \varphi''(x)\, dx$

avec $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

montrer que T est une distribution qu'on exprimera à l'aide de distributions connues.

Exercice 2 H étant la fonction de Heaviside on pose pour tout entier n positif $u_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} H(x)$

1) montrer que $u_n \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$
2) calculer $T_{u_n}^{(n)}$

Exercice 3 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(x) = n\, e^{-\pi n^2 x^2}$

1) montrer que $u_n \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$

A refaire 2) calculer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite $(T_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 4

1) démontrer que $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et vérifie $\chi(0) = 0$ ssi $\chi = x\varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
2) montrer qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$
3) montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que
$$\varphi = \varphi(0)\,\theta + x\psi$$
4) en déduire que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de $xT = 0$ ssi $T = K\delta$ avec $K \in \mathbb{C}$.
5) montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de $xT = V$ avec $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ssi T est la somme d'une solution particulière de $xT = V$ et de la solution de $xT = 0$.
6) résoudre $(x-a).(x-b).T = 0$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$