Mouhamed SAMBE

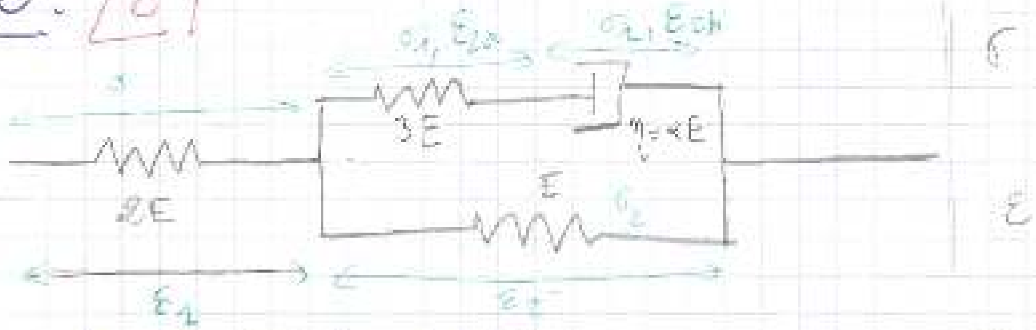
19,5

28/11/2017.

(1)

Examen de Comportement des matériaux :

Exercice 2 : 8



1) Le comportement décrit est bien visqueux puisque l'on a la présence d'un amortisseur. (1)

Oui

2) Utilisons les notations de la figure 3 ci dessus.

$\sigma = 2E\,\varepsilon_1 \qquad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{2a} + \varepsilon_{2b}$

$\sigma_2 = E\,\varepsilon_2 \qquad \sigma_1 = 3E\,\varepsilon_{2a}$ et $\sigma_1 = \eta\,\dot{\varepsilon}_{2b}$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \sigma = 3E\,\varepsilon_{2a} + E\,\varepsilon_2$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{2a} + \varepsilon_{2b}$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_{2a} + \dot{\varepsilon}_{2b} = \frac{\dot{\sigma}}{2E} + \frac{\dot{\sigma}_1}{3E} + \frac{\sigma_1}{\eta}$$

or $\sigma_1 = \sigma - \sigma_2 = \sigma - E\,\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$

donc $\sigma_1 = \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon_1) = \sigma - E\left(\varepsilon - \dfrac{\sigma}{2E}\right)$

$$\sigma_1 = \sigma - E\varepsilon + \frac{\sigma}{2} = \frac{3}{2}\sigma - E\varepsilon$$

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{3}{2}\dot{\sigma} - E\dot{\varepsilon}$$

donc $\dot{\varepsilon} = \dfrac{\dot{\sigma}}{2E} + \dfrac{1}{3E}\left(\dfrac{3}{2}\dot{\sigma} - E\dot{\varepsilon}\right) + \dfrac{1}{\eta}\left(\dfrac{3}{2}\sigma - E\varepsilon\right)$

or $\eta = \alpha E$

donc $\quad \cancel{\dot{\varepsilon}} = \dfrac{\dot{\sigma}}{2E} + \dfrac{\dot{\sigma}}{2E} - \dfrac{1}{3}\dot{\varepsilon} + \dfrac{3}{2\alpha E}\sigma - \dfrac{1}{\cancel{2}}\varepsilon$

3 donc $\quad \dfrac{4}{3}\dot{\varepsilon} + \dfrac{1}{\alpha}\varepsilon = \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \dfrac{3}{2\alpha E}\sigma$ équation différentielle générale du modèle. oui

3) Déterminons la fonction de fluage :
En appliquant la transformée de Carson à l'équation, on a

$$\frac{4}{3}p\,\varepsilon^* + \frac{1}{\alpha}\varepsilon^* = \frac{p}{E}\sigma^* + \frac{3}{2\alpha E}\sigma^*$$

$$\varepsilon^*\left(\frac{4}{3}p + \frac{1}{\alpha}\right) = \sigma^*\left(\frac{p}{E} + \frac{3}{2\alpha E}\right)$$

$$\frac{\varepsilon^*}{\sigma^*} = f^* = \frac{p/E}{\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{3}p} + \frac{\frac{3}{2\alpha E}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{3}p}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{E}p}{1 + \frac{4}{3}\alpha p} + \frac{\frac{3}{2E}}{1 + \frac{4}{3}\alpha p}$$

Posons $\tau_1 = \dfrac{4}{3}\alpha$ et $\Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{4}\tau_1$

$$f^* = \frac{\left(\frac{3}{4E}\right)\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} + \left(\frac{3}{2E}\right) \times \frac{1}{1 + \tau_1 p}$$

En appliquant la transformée inverse de Carson à f^*, on a

1 $$f(t) = \frac{3}{4E}e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{3}{2E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$ oui

$$f(t) = \frac{3}{2E} - \frac{3}{4E}e^{-\frac{t}{\tau_1}} = \boxed{\frac{3}{4E}\left(2 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) = f(t)}$$

4) $r^*(p) = \dfrac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \dfrac{\frac{4}{3}p}{\frac{3}{2\alpha E} + \frac{p}{E}} + \dfrac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{3}{2\alpha E} + \frac{p}{E}}$

$$= \frac{\frac{8}{9}\alpha E p}{1 + \frac{2\alpha}{3}p} + \frac{\frac{2E}{3}}{1 + \frac{2\alpha}{3}p}$$

Posons $\tau_2 = \dfrac{2\alpha}{3}$

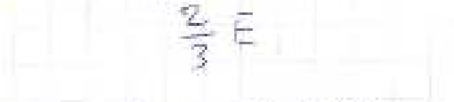
donc $r^* = \dfrac{\left(\frac{4E}{3}\right)\tau_2 p}{1 + \tau_2 p} + \left(\dfrac{2E}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{1 + \tau_2 p}$

On a donc $r(t) = \dfrac{4E}{3}e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dfrac{2E}{3}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$

1 $\boxed{r(t) = \frac{2}{3}E\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)}$ ok

5) Lorsque $\omega \to 0$.

$f^*(p) \simeq \dfrac{3}{2E}$, le système est équivalent à un ressort de raideur $\dfrac{2}{3}E$

1 

$\frac{2}{3}E$ $\Rightarrow$ $\sigma(t) = \dfrac{2E}{3}\varepsilon(t)$ tm

Lorsque $\omega \to +\infty$. $f^*(p) \simeq \dfrac{3}{4E}$

Le système est équivalent à un ressort de raideur $\dfrac{4E}{3}$;

1 

$\frac{4E}{3}$ $\sigma(t) = \dfrac{4E}{3}\varepsilon(t)$ tm

6) On a $\sigma^* = r^* \varepsilon^*$ ou $\varepsilon^* = f^* \sigma^*$

En régime établi, $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t)$

$$\sigma^* = \frac{\sigma_0 \omega p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\varepsilon^* = \left[\left(\frac{3}{4E}\right) \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p} + \left(\frac{3}{2E}\right) \frac{1}{1+\tau_1 p}\right] \frac{\sigma_0 \omega p}{p^2+\omega^2}$$

$$= f^*(p) \sigma^*(p)$$

La transformée inverse de Carson donne

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(t-\tau)\sigma(\tau)\, d\tau\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{3}{4E}\left(2 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_1}}\right) \sigma_0 \sin(\omega\tau)\, d\tau\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \frac{3}{2E} \sigma_0 \sin(\omega\tau)\, d\tau - \int_0^t \frac{3\sigma_0}{4E} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \sin(\omega\tau)\, d\tau - \int_0^t \frac{3\sigma_0}{4E} e^{\frac{\tau}{\tau_1}} \sin(\omega\tau)\, d\tau\right]$$

$$\int_0^t \frac{3}{2E} \sigma_0 \sin(\omega\tau)\, d\tau = \left[\frac{3\sigma_0}{2E\omega} \cos(\omega\tau)\right]_0^t = \frac{3\sigma_0}{2E\omega}\left(\cos(\omega t) - 1\right)$$

$$\int_0^t \frac{3\sigma_0}{4E} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \sin(\omega\tau)\, d\tau = \left[\frac{3\sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{4E\omega} \cos(\omega\tau)\right]_0^t = \frac{3\sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{4E\omega}\left(\cos(\omega t) - 1\right)$$

$$\underbrace{\int_0^t \frac{3\sigma_0}{4E} e^{\frac{\tau}{\tau_1}} \sin(\omega\tau)\, d\tau}_{A} = \left[\frac{3\sigma_0}{4E\omega} e^{\frac{\tau}{\tau_1}} \cos(\omega\tau)\right]_0^t - \int_0^t \frac{3\sigma_0}{4E\omega\tau_1} e^{\frac{\tau}{\tau_1}} \cos(\omega\tau)\, d\tau.$$

$$= \frac{3\sigma_0}{4E\omega}\left(e^{\frac{t}{\tau_1}} \cos(\omega t) - 1\right) + \left[\frac{3\sigma_0}{4E\omega^2\tau_1} e^{\frac{\tau}{\tau_1}} \sin(\omega\tau)\right]_0^t + \int_0^t \frac{3\sigma_0}{4E\omega^2\tau_1^2} e^{\frac{\tau}{\tau_1}} \sin(\omega\tau)\, d\tau$$

$$\rightarrow A\left(1 - \frac{1}{\omega^2\tau_1^2}\right) = \frac{3\sigma_0}{4E\omega}\left(e^{\frac{t}{\tau_1}} \cos(\omega t) - 1\right) + \frac{3\sigma_0 e^{\frac{t}{\tau_1}}}{4E\omega^2\tau_1} \sin(\omega t).$$

Mouhamed
SAMBE

②

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{3\sigma_0}{2E\omega}(\cos(\omega t)-1) - \frac{3\sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{4E\omega}(\cos(\omega t)-1) - A\right].$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\omega^2\tau_1^2}{\omega^2\tau_1^2-1}\right)\left[\frac{3\sigma_0}{4E\omega}\left(\frac{1}{\tau_1}e^{\frac{t}{\tau_1}}\cos(\omega t) + \omega e^{\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t)\right) + \frac{3\sigma_0}{4E\omega^2\tau_1}\left(\frac{1}{\tau_1}e^{\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t) - \omega e^{\frac{t}{\tau_1}}\cos(\omega t)\right)\right]$$

$$\varepsilon(t) = \frac{3\sigma_0\omega}{2E\omega}\sin(\omega t) - \frac{3\sigma_0}{4E\omega}\left(-\frac{1}{\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}}\cos(\omega t) + \omega e^{-\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t)\right]$$

$$+\frac{\omega^2\tau_1^2}{(\omega^2\tau_1^2-1)}\left[\cancel{\frac{3\sigma_0}{4E\omega\tau_1}e^{\frac{t}{\tau_1}}\cos(\omega t)} + \frac{3\sigma_0}{4E}e^{\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t) + \frac{3\sigma_0}{4E\omega^2\tau_1^2}e^{\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t) - \cancel{\frac{3\sigma_0 e^{\frac{t}{\tau_1}}}{4E\omega\tau_1}\cos(\omega t)}\right]$$

Sol

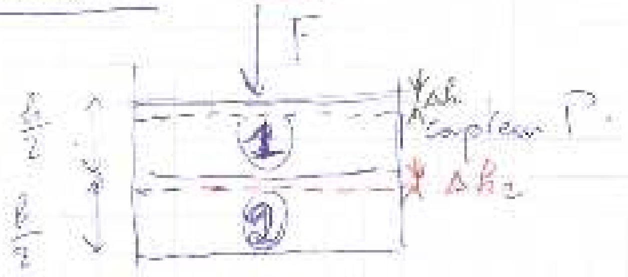
$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{3\sigma_0}{2E}\sin(\omega t) + \frac{3\sigma_0}{4E\omega\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}}\cos(\omega t) - \frac{3\sigma_0}{4E}e^{-\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t) + \frac{\omega^2\tau_1^2}{\omega^2\tau_1^2-1}\times\frac{3\sigma_0}{4E}e^{\frac{t}{\tau_1}}\sin(\omega t)\left(1+\frac{1}{\omega^2\tau_1^2}\right)}$$

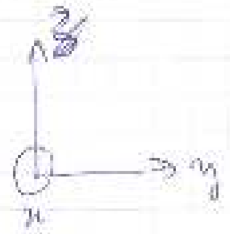
0,5

il suffisait d'écrire $\varepsilon^*(\omega) = \sigma^*(i\omega)$

Exercice 3 : 8

1)





Pour le matériau 1 du dessus,

on a $\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{F}{S}$ avec $S = \frac{\pi \phi^2}{4}$.

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\Delta h - \Delta h_2}{(h/2)} \qquad \varepsilon_{xx}^{(1)} = \varepsilon_{yy}^{1} = 0.$$

Le matériau est élastique linéaire isotrope

donc $$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}^{(1)} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy}^{(1)} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz}^{(1)} = 0$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}^{(1)} + \frac{1}{E}\sigma_{xx}^{(1)} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(1)} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{F}{S} = P$$

3 donc $\boxed{P = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{F}{S}}$ oui

AN Valeur numérique avec $\nu = 0,2$, $F = 1000\ N$ et $E = 200\ 000\ Pa$ et $\phi = 0,1\ m$

$S = 7,85.10^{-3}\ m^2$

1 $\boxed{P = 31,83\ kPa}$ oui

2) Le matériau 2 est soumis à un tassement de Δh_2 et à une pression $\sigma_{zz}^{(2)} = \frac{F}{S}$ et est élastique linéaire et isotrope. $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu_2}{E_2}\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \frac{\nu_2}{E_2}\,tr(\underline{\underline{\sigma}}^{(2)})\,\underline{\underline{\delta}}$.

avec $E_2 = 2E$ et $\nu_2 = 2\nu$

On a $\varepsilon_{33}^{(2)} = -\frac{\nu_2}{E_2}\left(\sigma_{xx}^{(2)} + \sigma_{yy}^{(2)}\right) + \frac{1}{E_2}\sigma_{33}^{(2)} =$

or $\sigma_{xx}^{(2)} = \sigma_{yy}^{(2)} = \frac{\nu_2}{1-\nu_2}\sigma_{33}^{(2)} = \frac{\nu_2}{1-\nu_2}\frac{F}{S}$.

$\rightarrow \cancel{\varepsilon_{33}^{(2)} = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{1-\nu_2}}$

$\cancel{\varepsilon_{33}^{(2)} = (1+\nu)}$ $\varepsilon_{33}^{(2)} = \left(-\frac{2\nu_2^2}{1-\nu_2} + 1\right) \times \frac{1}{E_2}\sigma_{33}^{(2)} = \frac{\Delta h_2}{\left(\frac{h}{2}\right)}$

$\cancel{\varepsilon_{33}^{(2)} = (1+\nu)}$ $\varepsilon_{33}^{(2)} = \left(\frac{-8\nu^2}{1-2\nu} + 1\right) \cdot \frac{1}{E_2}\frac{F}{S} = \frac{2\Delta h_2}{h}$.

$\rightarrow \boxed{\Delta h_2 = \frac{hF}{4ES}\left(\frac{1-2\nu-8\nu^2}{1-2\nu}\right)}$

3

$\varepsilon_{33}^{(1)} = \frac{\Delta h - \Delta h_2}{(h/2)} = \left(-\frac{2\nu^2}{1-\nu} + 1\right) \times \frac{1}{E_1}\frac{F}{S}$

$\rightarrow \Delta h = \frac{(1-2\nu^2-\nu) \times Fh}{(1-\nu)(2ES)} + \Delta h_2$

1

AN) $\Delta h_2 = 7,43 \cdot 10^{-3}$ m. avec $h = 0,1$ m

$\boxed{\Delta h = 0,036 \text{ m} = 3,6 \text{ cm}}$

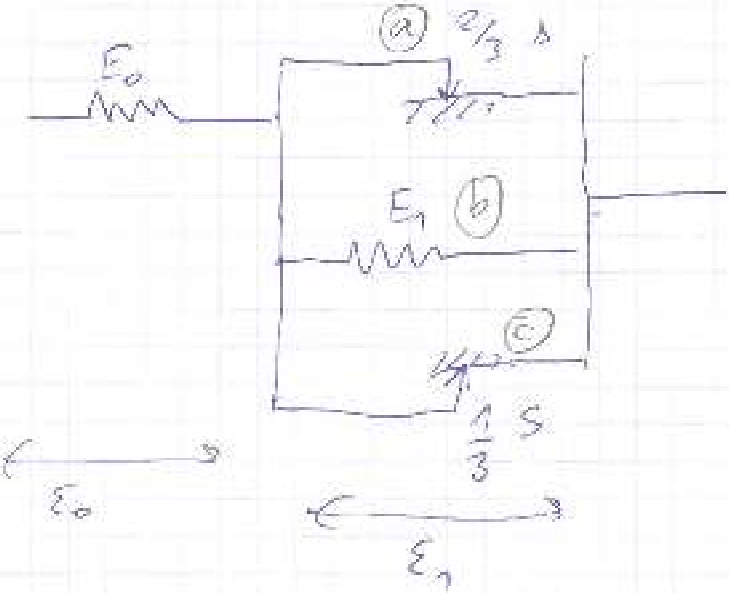
ok

Exercice 1 : 2

1) Le comportement décrit est non visqueux puisqu'il n'y a pas la présence d'un amortisseur. 1

oui

2)



$\varepsilon_1 = \varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_c$

$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \qquad \sigma = \varepsilon_0 E_0 = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c$

- Entre $\sigma \in [0 ; \frac{1}{3} s]$, le patin (c) ne glisse pas, donc il n'y a pas de déplacement $\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0} = \varepsilon$

Entre $\left[\frac{1}{3} s \text{ et } \frac{2}{3} s\right]$, le patin (c) glisse mais pas (a)

donc $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E_0}$. Non !! faux

- lorsque $\sigma > \frac{2}{3} s$, le système équivalent est le suivant

$E_0 \quad E_1$

$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\right)\sigma$

1