Deuxième test de mathématiques

Ex 1 Soient H un espace de Hilbert complexe et u un opérateur linéaire et continu sur H.

On rappelle que u est dit auto-adjoint si

$$\forall (x,y) \in H^2 \quad (u(x), y) = (x, u(y))$$

1) Montrer que si $\forall x \in H$, $(x, u(x)) \in \mathbb{R}$
alors $\forall (x,y) \in H^2$ on a $(y, u(x)) + (x, u(y)) \in \mathbb{R}$

2) En déduire que u est auto-adjoint si et seulement si

$$\forall x \in H, \quad (x, u(x)) \in \mathbb{R}.$$

3) On pose $u^n = \begin{cases} id_H & \text{si } n = 0 \\ u & \text{si } n = 1 \\ u \circ (u^{n-1}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

Soit P un polynôme : $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

on pose $P(u) = a_0 \, id_H + a_1 u + \cdots + a_n u^n$

On dit que u est positif si $\forall x \in H$, $(x, u(x)) \geq 0$

démontrer que si u est continu et positif, alors pour tout polynôme P à coefficients positifs, l'opérateur $P(u)$ est continu et positif.

Ex2 On considère l'espace de Hilbert ℓ^2 des suites complexes $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$

On définit l'opérateur $\tau : \ell^2 \to \ell^2$ par la relation

$\forall x \in \ell^2 \quad \tau(x) = y \quad$ avec $\quad y_i = x_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

1) calculer $\|\tau\|$

2) montrer l'existence de τ^* et calculer τ^*

3) calculer $\tau^* \circ \tau$ et $\tau \circ \tau^*$

4) On pose $u_n = \underbrace{\tau \circ \tau \circ \cdots \circ \tau}_{n \text{ fois}}$

i) $\forall x \in \ell^2$ calculer $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$

ii) calculer $\|u_n\|$

Ex3 Soient H un espace de Hilbert complexe et f une forme sesquilinéaire continue telle que $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in H$

$$|f(x,x)| \geq \alpha \|x\|^2$$

1) Montrer qu'il existe une application linéaire et continue ℓ de H dans H telle que $\forall (x,y) \in H^2 \quad f(x,y) = (x, \ell(y))$

2) Montrer que ℓ est injective

3) Montrer que dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy

4) En déduire que $\mathrm{Im}(\ell)$ est fermé

5) En déduire que ℓ est surjective

6) Montrer que ℓ est une bijection bicontinue