

SPHÈRE CREUSE SOUS PRESSION

Projet de modélisation

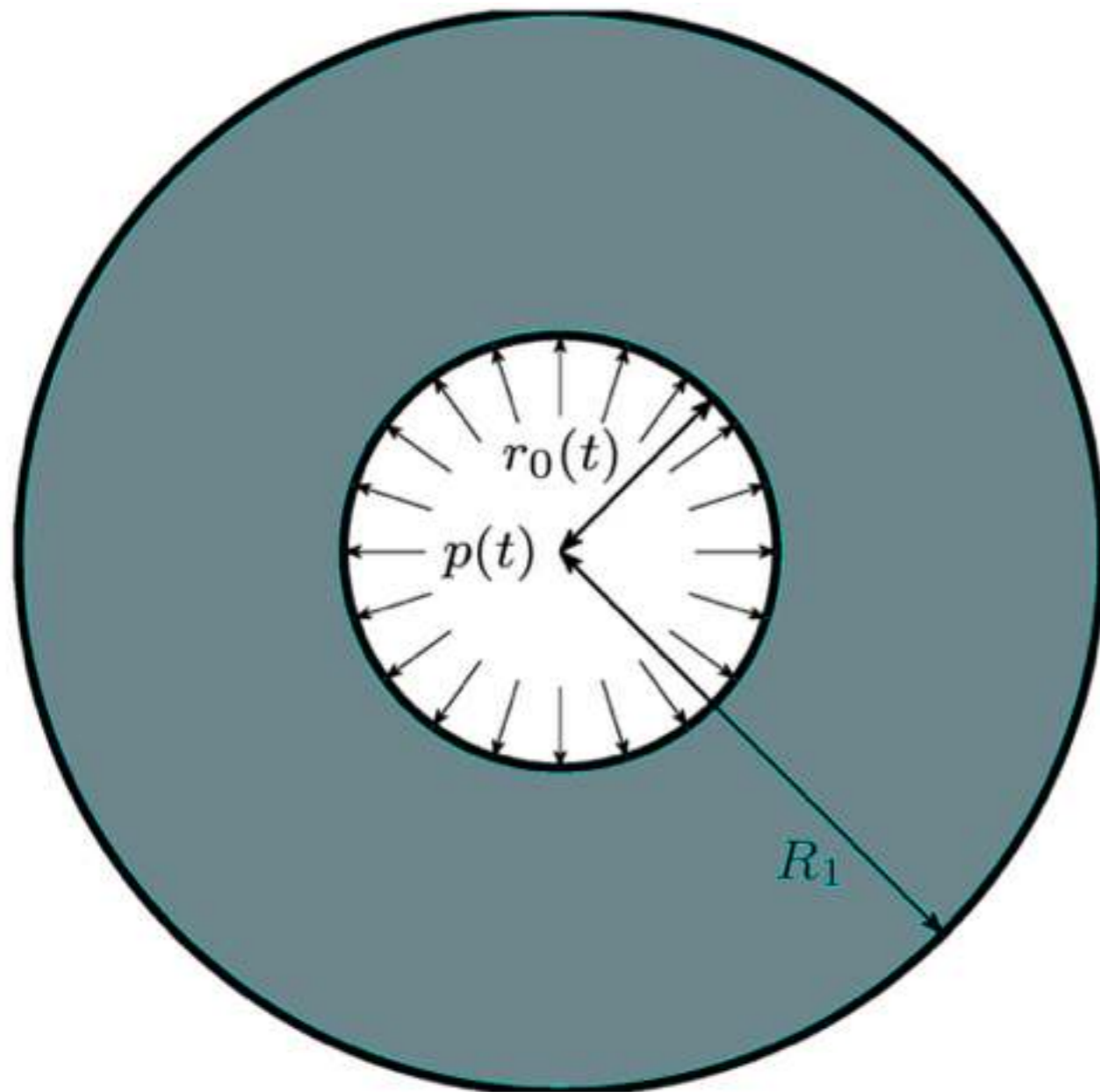
Gwendal LIBESSART - Alice MARCHAL - Antoine MICHALLET
Groupe 17

SOMMAIRE

1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

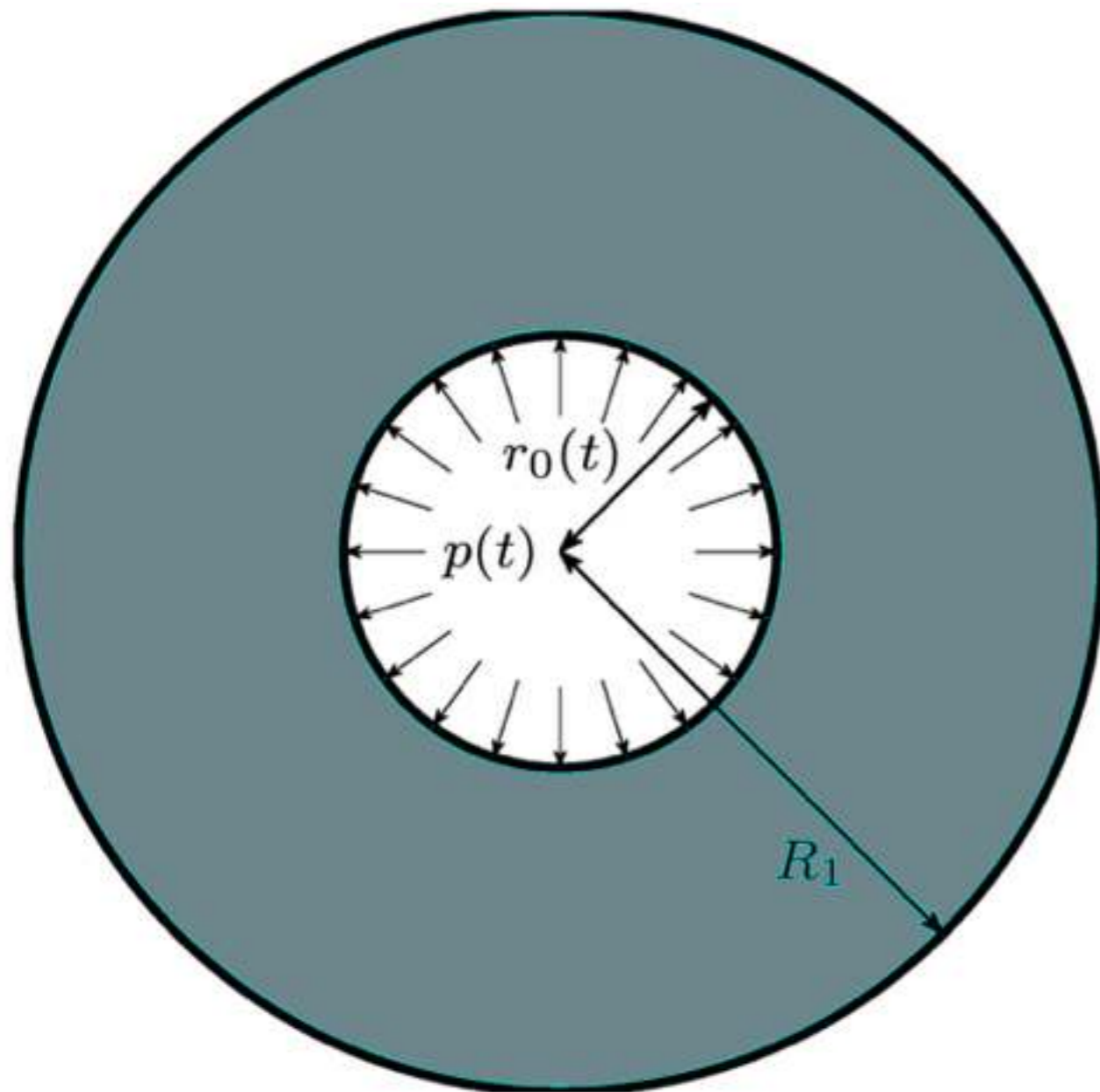
1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

I. Présentation du problème



- Sphère creuse sous pression : configuration déformée à l'instant t
- Solide déformable
- Transformation quasistatique
- Coordonnées sphériques

1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion



Objectifs du problème :

- Modélisation mécanique :
Trouver problème différentiel
Calcul tenseur de Cauchy
Calcul tenseur Almansi Euler
- Modélisation numérique :
Tracé du déplacement radial

1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

II. Modélisation mécanique

Simplification du problème :

Invariance par rotation selon θ et $\varphi \Rightarrow$ déplacement radial

De la forme $r = f(R,t)$

Calcul du tenseur des contraintes de Cauchy :

Avec l'énoncé : $\check{\sigma} = \lambda \text{tr}(D)\delta + 2\mu D$ $\check{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot W - W \cdot \sigma$.

De plus, $D = G$ et $W = 0$

Donc $\check{\sigma} = \dot{\sigma}$

Il suffit d'intégrer
et d'utiliser les équations du mouvement pour avoir

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \ln f'(R,t) + 2\lambda \ln\left(\frac{f(R,t)}{R}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \ln f'(R,t) + (2\lambda + 2\mu) \ln\left(\frac{f(R,t)}{R}\right)$$

1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

En explicitant les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{rr}(x) = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln \left[\frac{w(x)}{v(x)} \right] + 2 \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln[w(x)]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln \frac{w(x)}{v(x)} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ln(w(x))$$

Calcul du tenseur d'Almansi Euler : $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta - \mathbf{B}^{-1})$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f'(R,t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R}{f(R,t)}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{R}{f(R,t)}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{rr}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(1 - \left[\frac{v(x)}{w(x)} \right]^2 \right) \text{ et } \mathbf{E}_{\theta\theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{\varphi\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{w(x)} \right]^2 \right)$$

1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

III. Modélisation numérique

Détermination de v (composantes non nulles du tenseur des contraintes) :

Méthode d'Euler implicite

Equation différentielle ordinaire avec conditions initiale

$$v'(x) = \frac{1}{x(1-v)} [2 \ln v(x) (1-2v) + (v(x)-1)(1+v)]$$

$$\frac{w(1)^{(1+v)}}{v(1)^{(1-v)}} = \exp \left(-p(t) \frac{(1+v)(1-2v)}{E} \right)$$

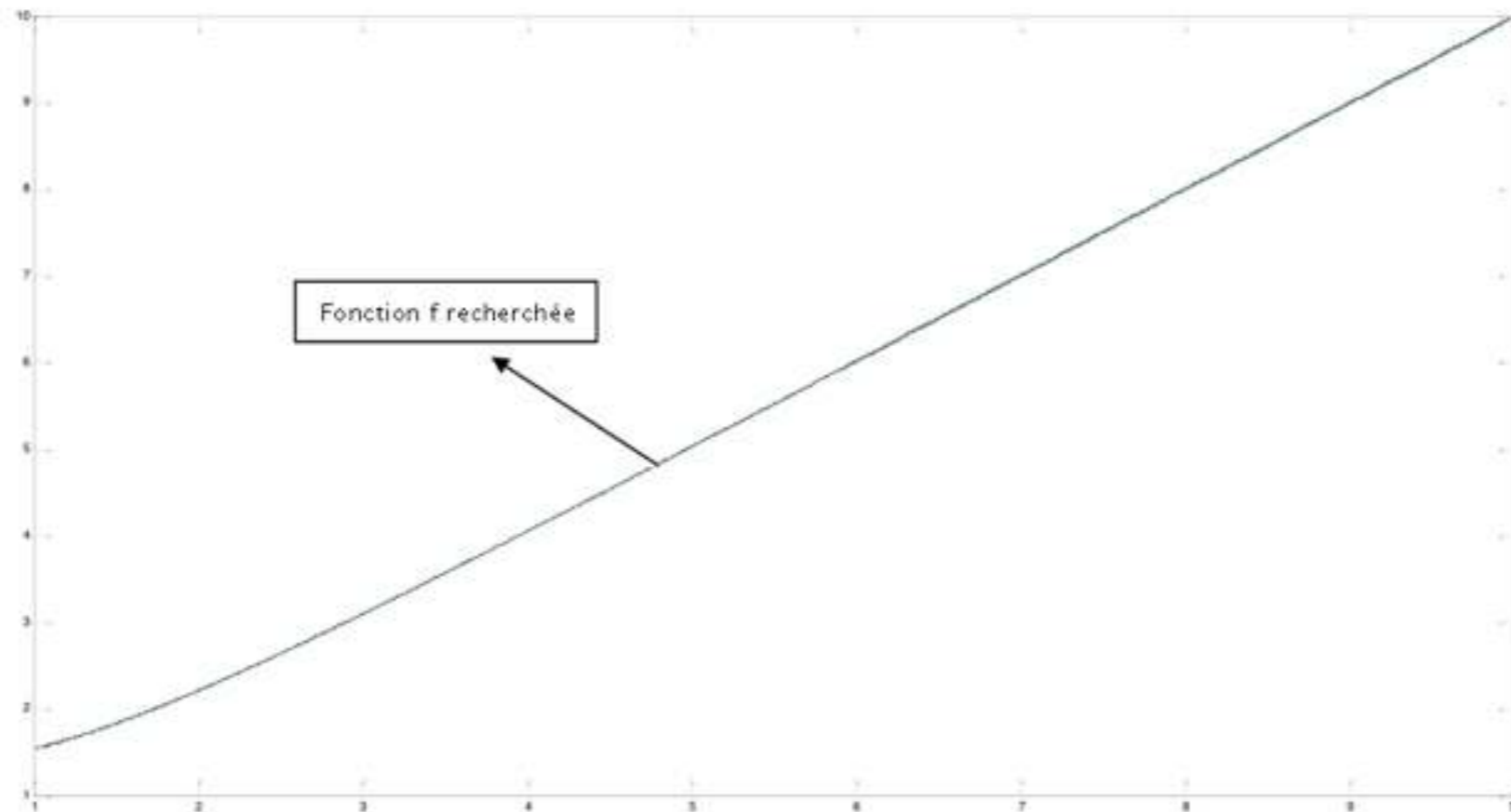
1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

Détermination de w (composantes non nulles du tenseur d'Almansi Euler) :

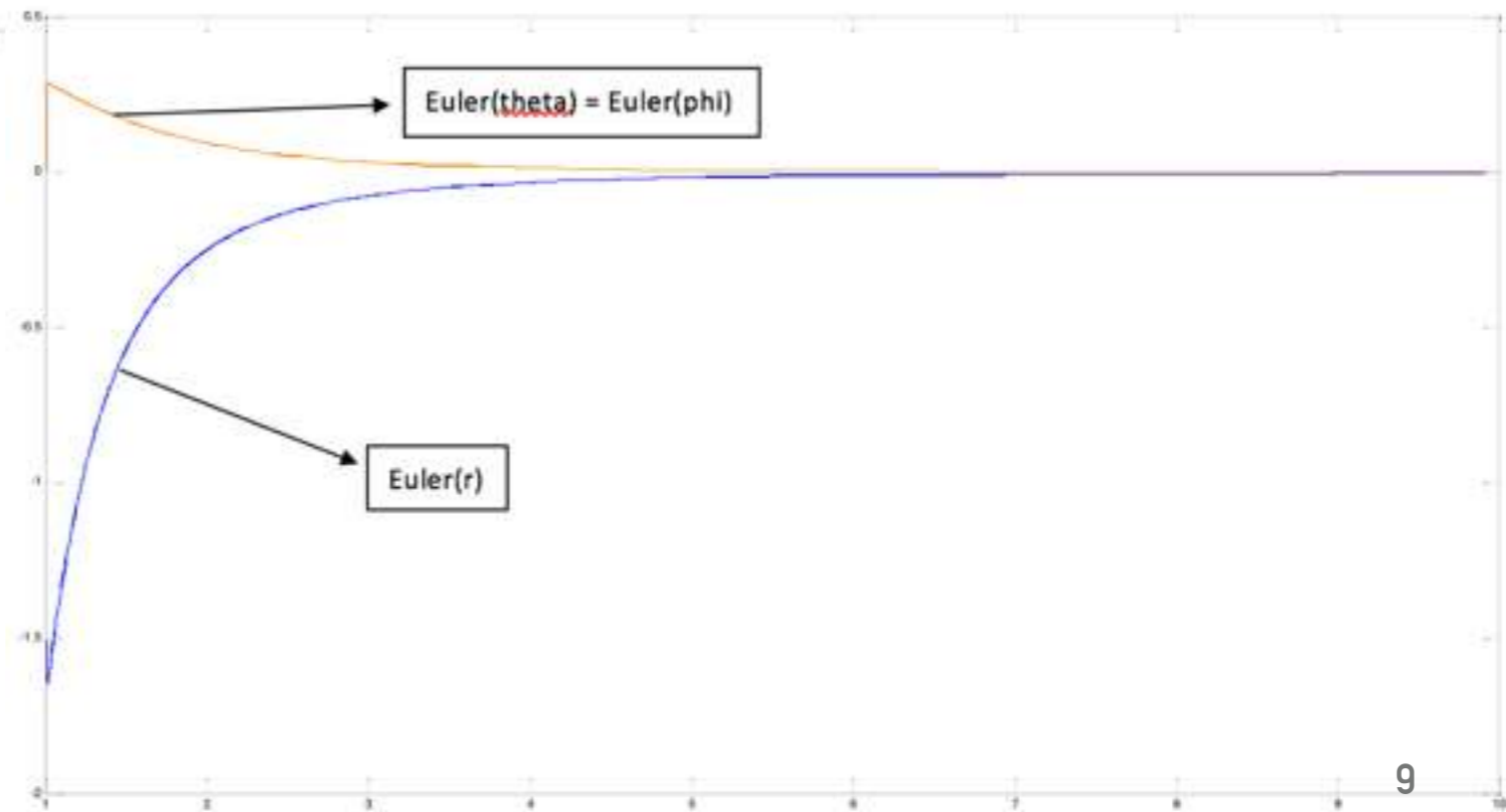
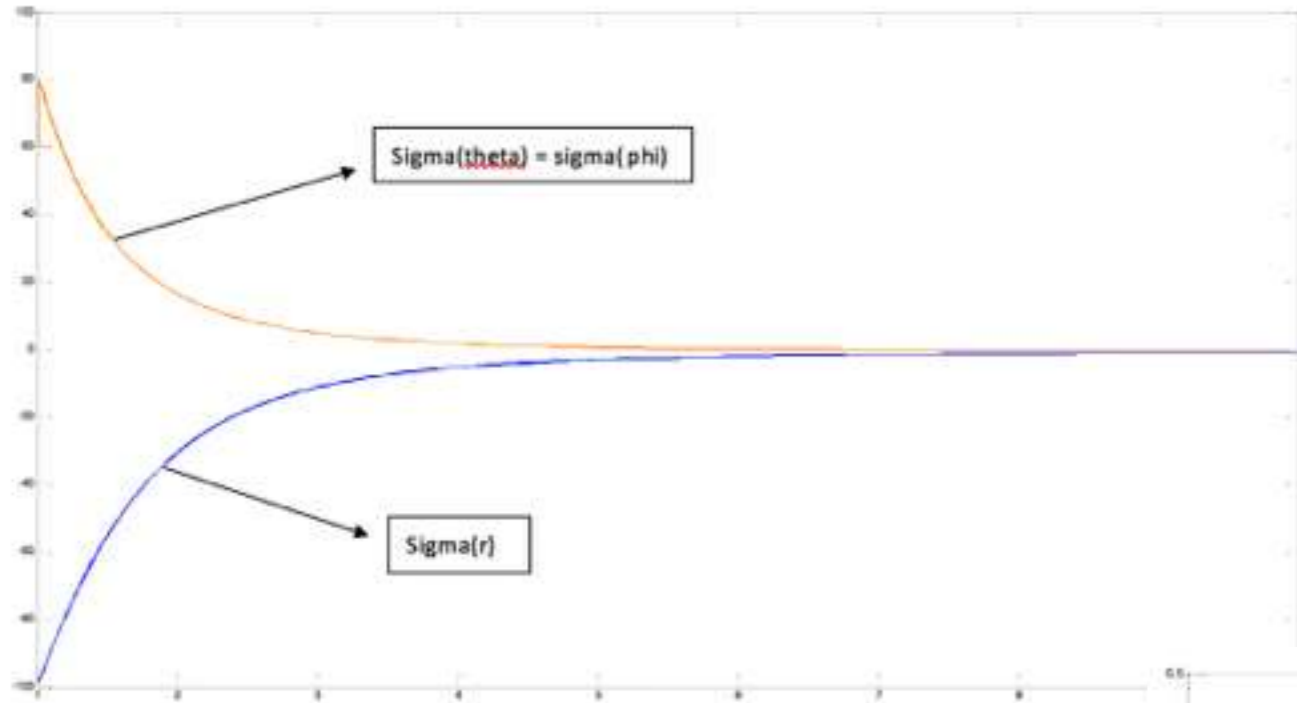
Méthode des trapèzes

$$w'(x) = w(x) \cdot \frac{v(x) - 1}{x \cdot v(x)} \quad w(x_1) = 1$$

Tracés :



1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion



1. Présentation du problème
2. Modélisation mécanique
3. Modélisation numérique
4. Conclusion

IV. Conclusion

Analyse des résultats :

Les contraintes diminuent lorsque l'on s'éloigne du centre de la sphère

Le déplacement diminue lorsque l'on s'éloigne du point d'application de la contrainte