Test n°1 de mathématiques 2H.

Ex1. Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\{A_i\}_{i=1,\dots,N}$ une suite finie de $\mathcal{T}$. Démontrer $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)$

Ex2 Soit X un ensemble non-dénombrable. On pose

$$\mathcal{T} = \{ A \subset X \mid A \text{ dénombrable ou bien } C_X A \text{ dénombrable} \}$$

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X
2) $\forall A \in \mathcal{T}$ on pose $\mu(A) = 0$ si A dénombrable
$\mu(A) = 1$ si $C_X A$ dénombrable

montrer que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est mesuré.

Ex3 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left[-x^2(t^2+i)\right]}{t^2+i}\, dt$

1) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$
2) Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3) En déduire les intégrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$

Ex4 On pose

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \exists K_{m,n} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ |x^n f^{(m)}(x)| \leqslant K_{m,n} \}$$

1) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$
2) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
3) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
4) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ exprimer la transformée de Fourier de $x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ en fonction de $\hat{f}$
5) Montrer que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.