# Fiche méthode : Déterminer le degré d'hyperstaticité

Calcul du nombre d'équations

S'il y a **n** solides dans le système matériel, puisqu'il existe **3** équations d'équilibre par solide, on obtient **3 n équations** au total.

Calcul du nombre d'inconnues

On calcule ensuite le nombre d'inconnues de liaisons qui existent entre deux solides du système matériel :
- 1 inconnue pour un appui simple,
- 2 inconnues pour une articulation entre deux solides,
- 3 inconnues pour un encastrement entre deux solides.

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$\mathbf{d = (1 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 + 3 \cdot L_3) - 3\,n}$$

Avec :
1 est le nombre d'inconnue pour un appui simple.
2 est le nombre d'inconnues pour une articulation.
3 est le nombre d'inconnues pour un encastrement.
$L_1$ est le nombre d'appuis simples.
$L_2$ est le nombre d'articulations.
$L_3$ est le nombre d'encastrements.
n est le nombre de solides.

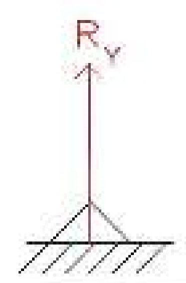
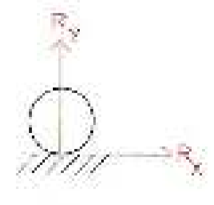
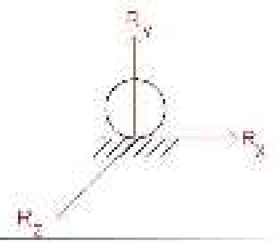
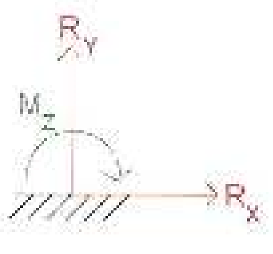
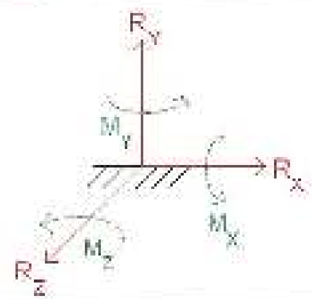
Corrolaire

d = 0 Le système est isostatique si pas de mouvement possible entre solides.
d > 0 Le système est hyperstatique si pas de mouvement possible entre solides.
d < 0 Le système est hypostatique.

# Fiche méthode : Etapes pour connaître les réactions d'appuis

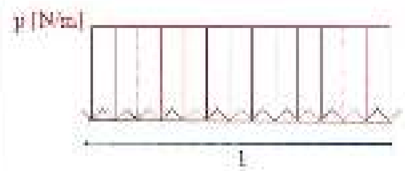
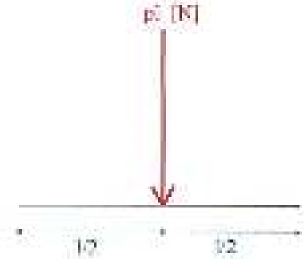
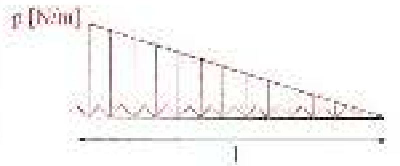
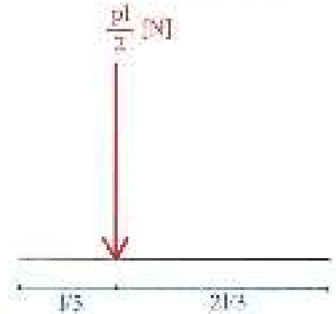
Etape 1 : Mise en place d'un repère global.

Etape 2 : Ecrire les réactions au niveau des liaisons

| Liaison | 2D | 3D |
|---|---|---|
| Simple |  |  |
| Rotule |  |  |
| Encastrement |  |  |



Etape 3 : Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes

| Force répartie | Force globalement équivalente |
|---|---|
|  |  |
|  |  |

Etape 4 : Ecrire les équations d'équilibre du système :

- Somme des forces nulle
- Moment du système global nul

Etape 5 : Valorisation des composantes nulles connues aux liaisons si le nombre d'équations est inférieur aux nombre d'inconnues

| Liaison | 2D | 3D |
|---|---|---|
| Simple | $R_x = 0$<br>$M_z = 0$ | $R_x = 0$<br>$R_z = 0$<br>$M_x = 0$<br>$M_y = 0$<br>$M_z = 0$ |
| Rotule | $M_z = 0$ | $M_x = 0$<br>$M_y = 0$<br>$M_z = 0$ |
| Encastrement | Aucune composante nulle | Aucune composante nulle |

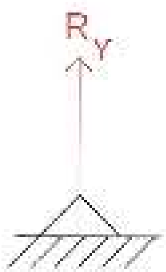
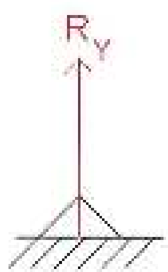
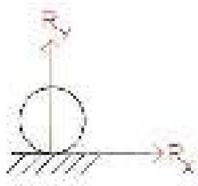
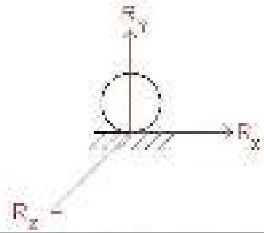
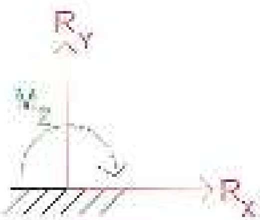
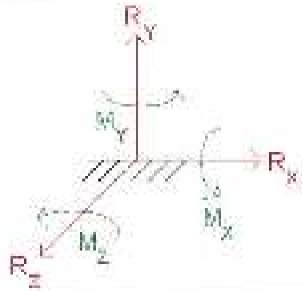
Etape 6 : résolution du système

Etape 7 : Rédaction de la solution

## Fiche méthode : Etapes pour connaitre les réactions d'appuis

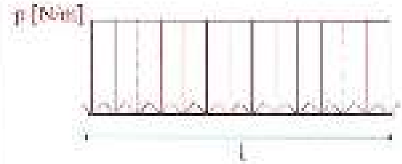
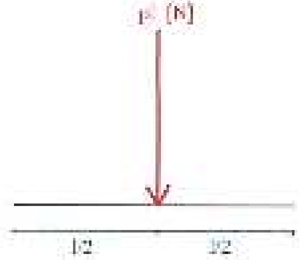
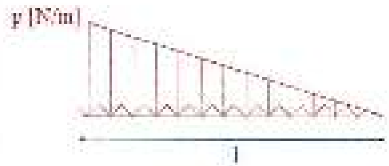
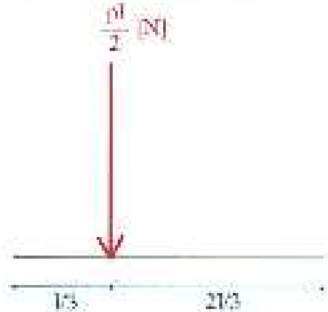
Etape 1 : Mise en place d'un repère global

Etape 2 : Ecrire les réactions au niveau des liaisons

| Liaison | 2D | 3D |
|---|---|---|
| Simple |  |  |
| Rotule |  |  |
| Encastrement |  |  |



Etape 3 : Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes

| Force répartie | Force globalement équivalente |
|---|---|
|  |  |
|  |  |

Etape 4 : Ecrire les équations d'équilibre du système :

- Somme des forces nulle
- Moment du système global nul

Etape 5 : Valorisation des composantes nulles connues aux liaisons si le nombre d'équations est inférieur aux nombre d'inconnues

| Liaison | 2D | 3D |
|---|---|---|
| Simple | $R_x = 0$<br>$M_z = 0$ | $R_x = 0$<br>$R_z = 0$<br>$M_x = 0$<br>$M_y = 0$<br>$M_z = 0$ |
| Rotule | $M_z = 0$ | $M_x = 0$<br>$M_y = 0$<br>$M_z = 0$ |
| Encastrement | Aucune composante nulle | Aucune composante nulle |

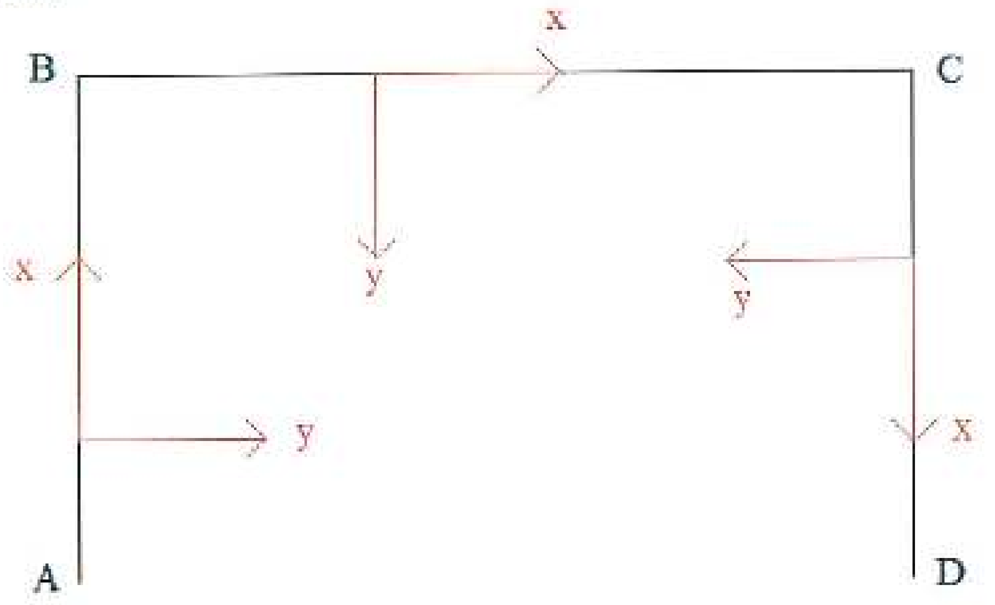
Etape 6 : résolution du système

Etape 7 : Rédaction de la solution

## Fiche méthode : Tracer le diagramme de sollicitations

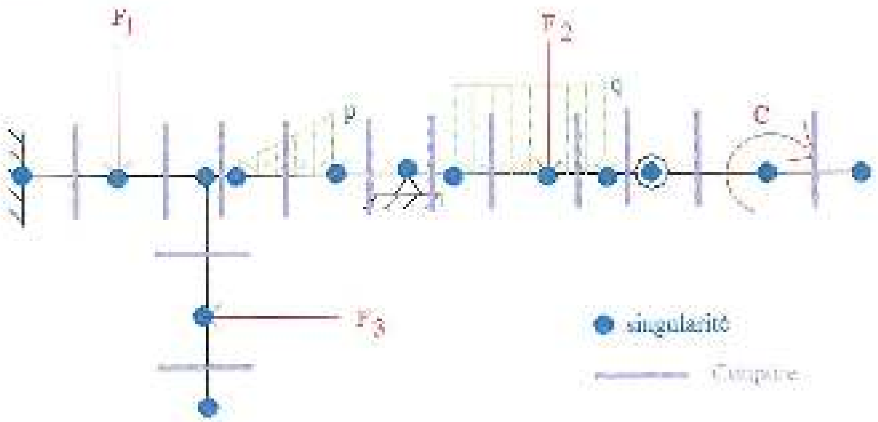
<u>Etape 1 :</u> mettre en place un repère local sur chaque poutre de la structure

Exemple :



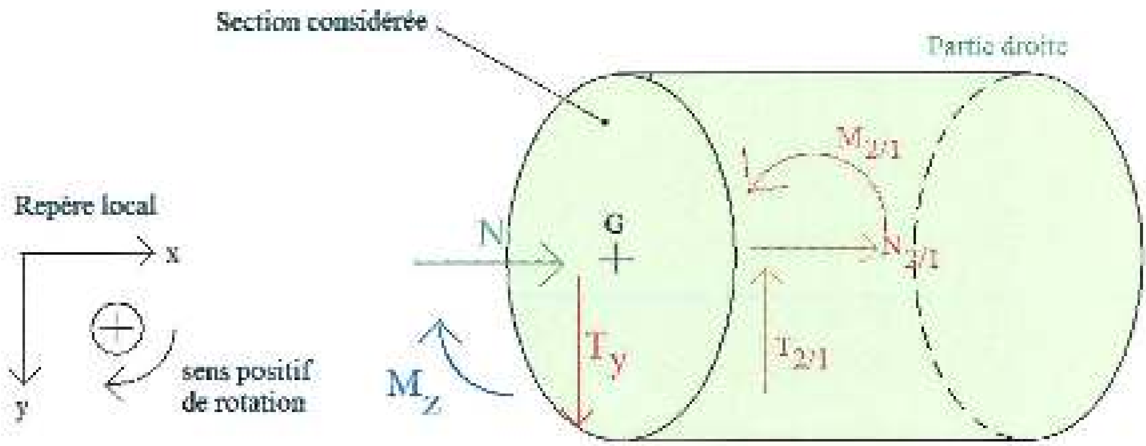

<u>Etape 2</u> : Effectuer une coupure entre chaque singularité

Exemple : il y a 13 coupures à faire dans la situation suivante à faire

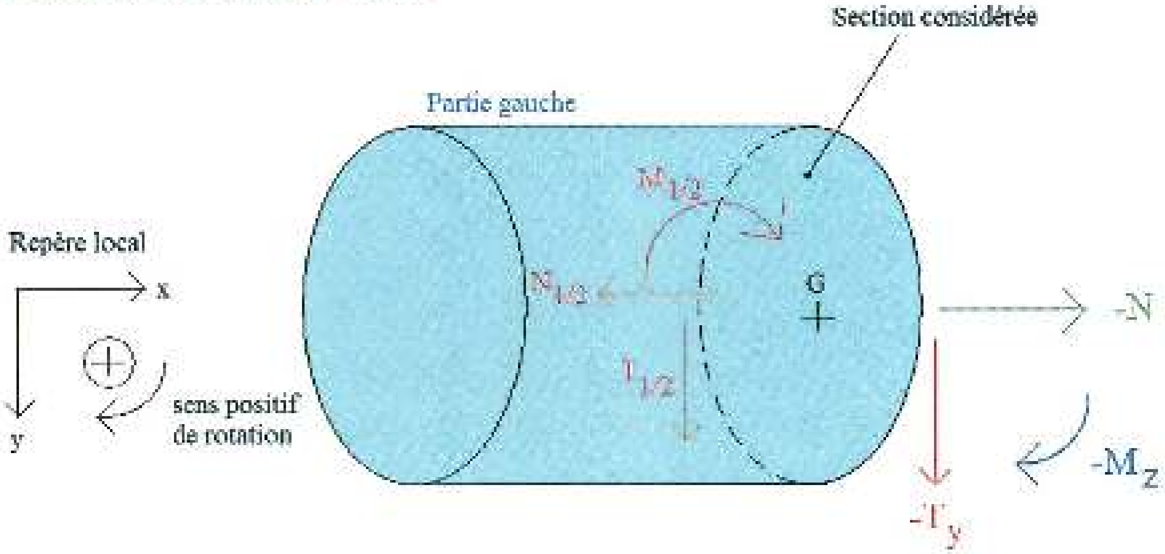


Etape 3 : Conserver la partie droite ou la partie gauche pour chaque coupure

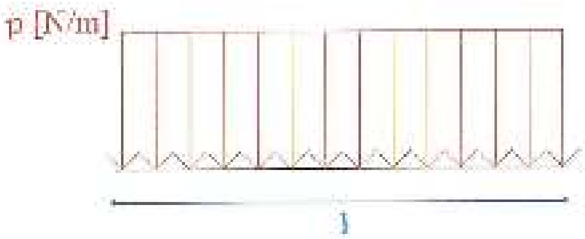
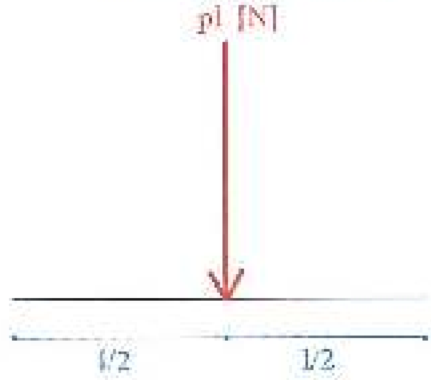
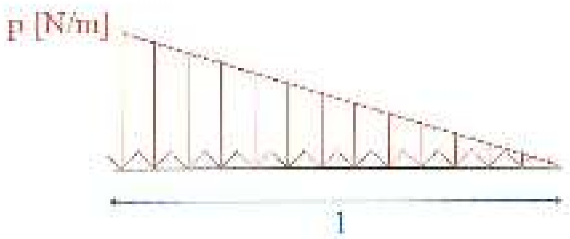
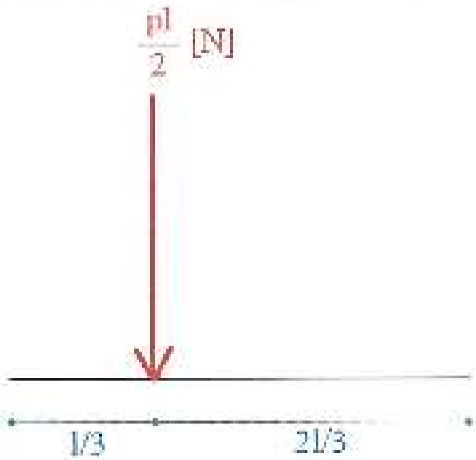
Conservation de la partie droite




Conservation de la partie droite



Etape 4 : Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée (droite ou gauche) par une force globalement équivalente :

| Force répartie | Force globalement équivalente |
|---|---|
|  |  |
|  |  |

Etape 5 : Ecrire les équations d'équilibre

- Somme des forces nulle
- Moment du système global nul

**Les étapes 3,4 et 5 sont à réaliser pour chaque coupure, puis**

Etape 6 : tracer les diagrammes de sollicitations

- N, $T_y$ et $M_z$ si le problème est 2D
- N, $T_y$, $M_z$ ,$T_z$ , $M_y$ et $M_x$ (ou T) si le problème est 3D

Etape 7 :Vérifications des relations importantes entre sollicitations suivantes en 2D

$$\frac{dT_y}{dx} = p$$
$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y$$

Avec p la valeur d'une force répartie en [N/m]

# Fiche méthode : Déterminer la position de l'axe neutre

**Rappels**

Données d'entrée pour déterminer la position de l'axe neutre

Avant de calculer la position de l'axe neutre d'une section donnée, on doit connaitre :

a) Certains éléments du torseur :
- L'effort normal N
- Le moment fléchissant selon l'axe z (du repère local) $M_z$
- (Si le problème est en 3D, le moment fléchissant selon l'axe y (du repère local) $M_y$)

b) Les caractéristiques géométriques de la section considérée :
- La surface S
- La position du centre de gravité G
- Le moment d'inertie $I_z$
- (Si le problème est en 3D, le moment d'inertie $I_y$)

Axe neutre (A.N.)

L'axe neutre est la droite d'équation $\sigma(y,z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z = 0$.

Nota : Il est la frontière entre la zone comprimée et zone tendue mais ne coupe pas forcément la section.

**Méthode**

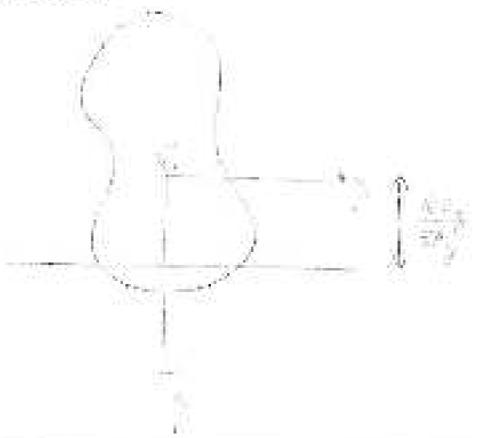
Cas 1 : N ≠ 0 et $M_y = M_z = 0$

Il n'existe pas d'axe neutre. La section est soit entièrement tendue (si N < 0), soit entièrement comprimée (si N > 0)

Cas 2 : $M_z \neq 0$ et $M_y = 0$ (pas de condition sur N)

L'axe neutre est la droite d'équation $y = \frac{NI_z}{SM_z}$

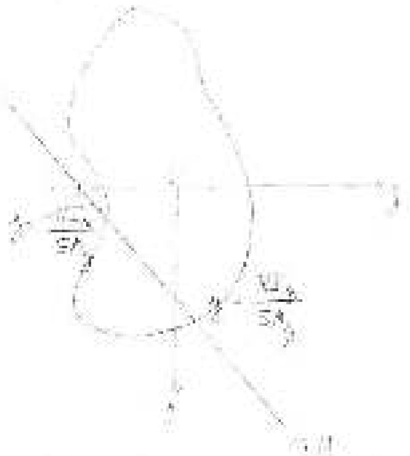
Exemple si N et $M_z$ ont même signe :



<u>Cas 3 (possible que si le problème est 3D) :</u> $M_z \neq 0$ et $M_y \neq 0$ (pas de condition sur N)

L'axe neutre est la droite passant par les points $\begin{pmatrix} \frac{NI_z}{SM_z} \\ 0 \end{pmatrix}_{G;\vec{y};\vec{z}}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{NI_y}{SM_y} \end{pmatrix}_{G;\vec{y};\vec{z}}$

Exemple si N, $M_z$ et $M_y$ ont même signe :



# Fiche méthode : Calculs des contraintes normales

## Rappels

### Données d'entrée du calcul

Avant de calculer les contraintes normales au niveau d'une section donnée, on doit connaître :

c) Certains éléments du torseur :
- L'effort normal N
- Le moment fléchissant selon l'axe z (du repère local) $M_z$
- (Si le problème est en 3D, le moment fléchissant selon l'axe y (du repère local) $M_y$)

d) Les caractéristiques géométriques de la section considérée :
- La surface S
- La position du centre de gravité G
- Le moment d'inertie $I_z$
- (Si le problème est en 3D, le moment d'inertie $I_y$)

### Valeur des contraintes normales en un point

Les contraintes normales en un point sont calculées par la relation :

$$\sigma(y,z) = \frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Nota : (y,z) sont les coordonnées du point où on calcule la contrainte dans le repère $(\vec{y}\,;\vec{z})$ centré au centre de gravité G.

### Axe neutre (A.N.)

L'axe neutre est la droite d'équation $\sigma(y,z) = 0$.

Nota : Il est la frontière entre la zone comprimée et zone tendue mais ne coupe pas forcément la section.

### Traction / compression

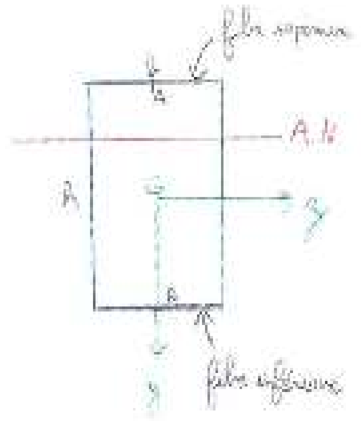
$\sigma > 0$ : traction

$\sigma < 0$ : compression

## Méthode

1) Déterminer la position de l'axe neutre
2) Calculer les contraintes au(x) point(s) de la section le(s) plus éloigné(s) de part et d'autre de l'A.N. pour obtenir les contraintes les plus importantes en valeur absolue.
3) Puis si cela est demandé (uniquement lorsque le problème est 2D), schématiser les contraintes en dessinant la section de profil avec les contraintes en chaque point associé.

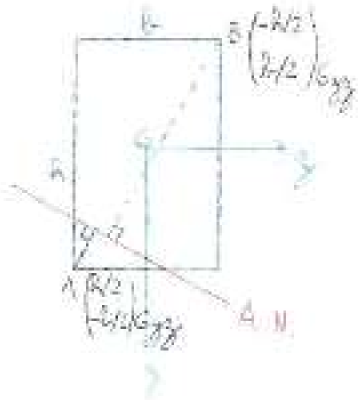
Exemple 1




Calcul sur

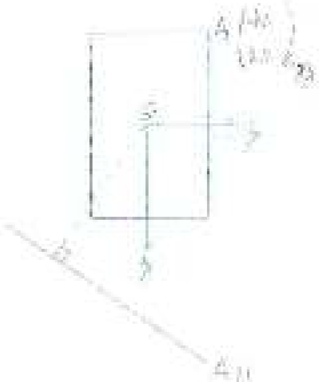
- n'importe quel point de la fibre supérieure puisqu'ils sont tous à égale distance de l'A.N. Par exemple en A (-h/2 ; 0)
- n'importe quel point de la fibre inférieure puisqu'ils sont tous à égale distance de l'A.N. Par exemple en B (h/2 ; 0)

Exemple 2




Calculs des contraintes en A (h/2 ; -b/2) et en B (-h/2 ; b/2) car ils sont les plus éloignés de l'A.N.

Exemple 3



Calcul uniquement en A car aucun point de la section ne se trouve de l'autre côté de l'A.N.

Nota : ce cas correspond à une section entièrement tendue (si $\sigma > 0$) ou entièrement comprimée (si $\sigma < 0$)

# Fiche méthode : Déterminer le noyau central

**Rappels**

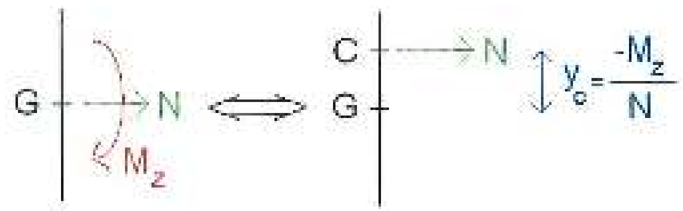
Flexion composée si $N \neq 0$

Définition du point de passage

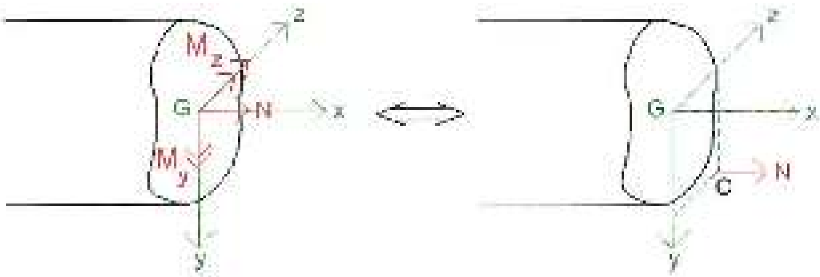
> Point du plan de la section droite où le torseur des forces de gauche se réduit uniquement à l'effort normal.

*Remarque* : ce point est également appelé centre de flexion.

En 2D :




En 3D :

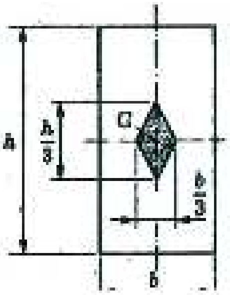


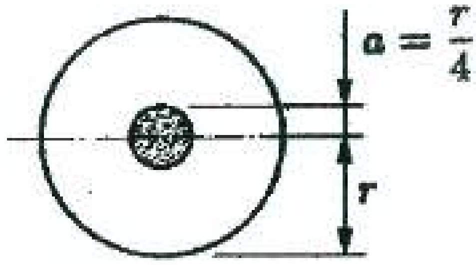

Avec $y_c = \frac{-M_z}{N}$ et $z_c = \frac{M_y}{N}$

Méthode pour la construction du noyau central

1) Calcul de l'ellipse d'inertie : $\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$
   a. Détermination de la position du centre de gravité
   b. Détermination des caractéristiques géométriques de la section (surface S et moments d'inertie $I_y$ et $I_z$)
2) A chaque point du contour M ($y_M$ ; $z_M$), tracé de la polaire de M (droite d'équation : $\frac{y y_M}{I_z} + \frac{z z_M}{I_y} = \frac{1}{S}$)
3) Pour chaque polaire, tracé de l'antipolaire (droite symétrique de la polaire par rapport au centre de gravité G de la section)
4) L'ensemble des points à l'intérieur des antipolaires constitue le noyau central (NC)

NC des sections pleines rectangulaires et circulaires

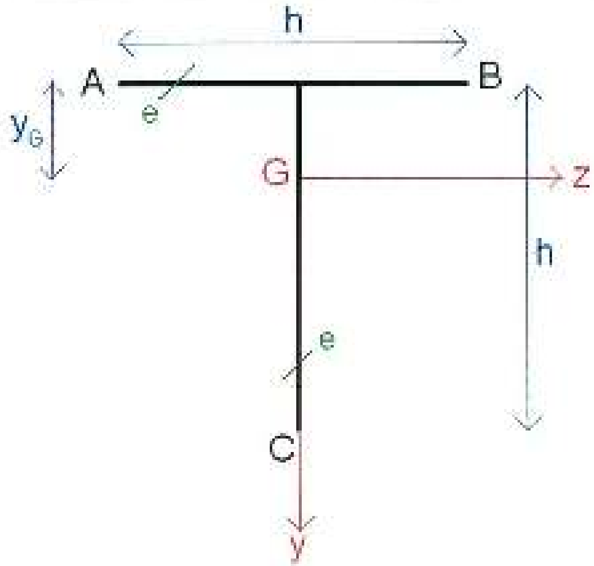



Utilisation du noyau central pour une force N excentrée

| Etat de la section | $N \in (NC)$ | $N \notin (NC)$ |
|---|---|---|
| N >0 | Entièrement comprimée | Section partiellement comprimée |
| N < 0 | Entièrement tendue | Section partiellement comprimée |

**Exercice type**




Calculer puis dessiner le noyau central en supposant que e<<h

**Correction**

Position du centre de gravité

$$y_G = \frac{h}{4}$$

Moments d'inertie

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{5eh^3}{24}$$

ECI : $\frac{48y^2}{5h^2} + \frac{24z^2}{h^2} = 1$

Coordonnées des points du contour

$$A\begin{pmatrix}-h/4\\-h/2\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-h/4\\h/2\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}3h/4\\0\end{pmatrix}$$

Polaire de A

$$\frac{48y}{5h^2}\times\frac{-h}{4}+\frac{24z}{h^2}\times\frac{-h}{2}=1$$
$$\Rightarrow\frac{-12y}{5h}-\frac{12z}{h}=1$$

Polaire de B : La polaire de B est la symétrique de la polaire de A par rapport à l'axe $\vec{y}$.

Polaire de C

$$\frac{48y}{5h^2}\times\frac{3h}{4}+\frac{24z}{h^2}\times 0=1$$
$$\Rightarrow y=\frac{5h}{36}$$

Noyau central (surface verte)