MATHEMATIQUE - Analyse - TEST 3 -

DUREE 2h00 - 2009/2010

EXERCICE 1 (4 pts)

Les objets suivants définis sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont-ils des éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? De $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$? Le cas échéant, vous pouvez les identifier à l'aide de distributions connues.

1) $T_1(\phi) = \phi''(0)$.

2) $T_2(\phi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\exp(x) - x)\phi(x)}{x} dx$.

3) $T_3(\phi) = \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi^2(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi^2(x)}{x} dx \right)$.

4) $T_4(\phi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(x) - 1)\phi(x)}{x} dx$.

EXERCICE 2 (5 pts)

On veut résoudre en T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$\alpha T' + \beta T = \gamma$, avec α, β, γ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$. On suppose $\beta = \alpha'$. On pourra poser $S = \alpha T$.

1) Résoudre le problème pour $\alpha(x) = \exp(x)$.

2) Résoudre le problème pour $\alpha(x) = x - 1, \gamma(x) = 1$.

3) On suppose maintenant $\alpha(x) = x^2, \gamma(x) = 1$. Exprimer une solution particulière.

EXERCICE 3 (4 pts)

Soit $f \in L^2(0,1)$. Ecrire la formulation variationnelle du problème:

$$\begin{cases} u''''(x) - u''(x) + (2 + \sin(x^2))u(x) = f(x), x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

de façon à faire apparaître une forme bilinéaire continue coercive et une forme linéaire continue. On décrira en particulier l'espace dans lequel on cherche la solution u et son produit scalaire (sans faire de preuves).

EXERCICE 4 (7 pts)

On considère le problème suivant de vibrations libres de flexion d'une poutre de longueur 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0, (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ \forall t > 0, u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ \forall t > 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \\ \forall x \in]0,1[, u(x,0) = u_0(x) \in L^2(0,1), \quad \forall x \in]0,1[, \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \in L^2(0,1). \end{cases}$$

1) En séparant les variables $u(x,t) = \psi(t)\phi(x)$, établir les équations différentielles vérifiées par ψ et ϕ en fonction d'une constante notée K qui détermine le signe de la fonction de t dépendant de $\psi''(t)$ et $\psi(t)$ uniquement.

On rappelle que pour une équation différentielle d'ordre 4 en variable x, on introduit l'équation caractéristique polynômiale de degré 4, et que si les s_j, $(j = 1, ..4)$ sont les racines de ce polynôme, les solutions générales de l'équation différentielle sont des combinaisons linéaires des fonctions $\exp(s_j x)$.

2) Montrer que si $K = 0$, les solutions élémentaires obtenues ne peuvent vérifier les conditions au bord que si elles sont identiquement nulles.

3) Montrer que si $K > 0$, il ne peut y avoir de solution autre que la solution nulle pour ϕ . (Indications: on utilisera d'abord les deux conditions aux limites en $x = 0$, puis celles en $x = 1$).

4) Etudier le cas $K < 0$ et construire les solutions élémentaires en fonction d'un entier $k \geq 1$. Montrer que chaque solution élémentaire ne dépend que de 2 constantes que l'on notera a_k et b_k.

5) On cherche une solution du problème en superposant les solutions élémentaires. Montrer que les coefficients inconnus a_k et b_k pour chaque $k > 1$ peuvent être déterminés à partir des développements en séries de Fourier (DSF) des fonctions u_0 et v_0.

[Indication exercice 4, question 4: on pourra admettre que si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ e^r & e^{-r} & e^{ir} & e^{-ir} \\ e^r & e^{-r} & ie^{ir} & -ie^{-ir} \end{pmatrix}$,

$det(M)$ est proportionnel à $(\cos(r)\cosh(r) - 1)$ et que l'équation définie par ce terme admet une quantité dénombrable de racines positives ou nulles.]

$\varphi^{(4)} = \alpha \Rightarrow \varphi'' = \alpha x + \beta \Rightarrow \varphi' = \alpha \frac{x^2}{2} + \beta x + \gamma$

φ

$S = x^2 T$

$S = T_c \quad c = 0 \Rightarrow \langle S, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,\varphi\,dx = 0 = \langle x^2 T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx$
$= \langle T, x^2 \varphi \rangle$

$T = \delta_0 + c\,\delta_0'$

$\Rightarrow x^2 T = x^2 \delta_0 + c x^2 \delta_0' \qquad x^2 \delta_c + a x^2 \delta_c'$

$= 0 + 2xc\delta_0 = 0 \qquad x^2 \delta_c + 2a x \delta_c$

$c^2 \delta_c + 2ac\,\delta_c$