E.N.T.P.E.

Cours de Probabilités – Premier devoir surveillé

Vendredi 6 janvier 2017

Instructions et indications importantes

Les étudiants ont droit à une feuille de notes recto au format A4.
Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.
La qualité de la rédaction (précision, concision et soin) sera prise en compte dans la notation. La concision est d'autant plus importante que le test est relativement long.
Le barème est uniquement donné à titre indicatif et pourra être modifié ultérieurement.

Questions de cours (4 *pts*)

(1) Dire en une phrase ce qu'est une combinaison de p éléments parmi un ensemble de n éléments. En donner un exemple. Redémontrer la formule du calcul du nombre de telles combinaisons. Réaliser l'application numérique où $p = 100$ et $n = 102$.

(2) Soient Ω un univers, $(A_i)_{i\in[1,n]}$ un système complet d'événements et B un événement de Ω. Redémontrer la formule de Bayes sous la forme suivante, et expliquer l'intérêt de cette formule :

$$P_B(A_1) = \frac{P_{A_1}(B).P(A_1)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B).P(A_k)}$$

(3) Soit X une variable aléatoire réelle continue dont la densité est f_X. Énoncer le théorème et rappeler la formule permettant de calculer le moment d'ordre m de X. Donner le nom et la signification (potentiellement illustrée) du moment d'ordre 1, et des moments centrés-réduits d'ordres 2, 3 et 4.

(4) Un espace probabilisé se défini par le triplet (Ω, T, P). Que représente chacun des trois composants de ce triplet ? Donner le nom de T et de P dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$. Représenter graphiquement un événement quelconque de T dans le cas où $n = 2$.

(5) Soient deux variables aléatoires réelles continues X et Y. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées. (*bonus 1 pt*).

Exercice 1 (4 *pts*)

(1) Un élève de l'ENTPE a 10 amis très proches. Il souhaite en inviter 4 au *before* du jeudi soir. On s'intéresse au nombre de groupes d'invités possibles sous différentes contraintes.

(a) Combien de groupes différents d'invités y a-t-il en l'absence de contrainte ?

(b) Combien y en a-t-il si deux sont en *colloc* et ne peuvent venir qu'ensemble ?

(c) Combien si deux sont de promos différentes et ne peuvent pas être invités ensemble ?

(2) Sur ces 10 amis, 7 sont des filles et 3 des garçons. En supposant que chaque ami a une probabilité identique d'être invité, déterminer la loi X que suit le nombre de garçons invités dans le groupe de 4 ?

Exercice 2 (4 *pts*)

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC. À chaque instant n (entier naturel), il est sur l'un quelconque des trois sommets. À l'instant $n+1$ suivant, il y reste avec une probabilité de $2/3$ où se place de manière équiprobable sur l'un des deux autres sommets. On note :

- A_n l'événement : « le mobile se trouve en A à l'instant n » et $a_n = P(A_n)$;
- B_n l'événement : « le mobile se trouve en B à l'instant n » et $b_n = P(B_n)$;
- C_n l'événement : « le mobile se trouve en C à l'instant n » et $c_n = P(C_n)$.

(1) Exprimer, pour chaque entier n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

(2) Exprimer $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ où l'on a $M^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) En déduire les expressions de de a_n, b_n et c_n et calculer les limites correspondantes. Que signifient concrètement ces limites ?

Exercice 3 (4 *pts*)

On étudie la durée de fonctionnement d'un appareil électrique. Celui-ci est constitué de deux composants identiques mais indépendants dont les durées de fonctionnement respectives X_1 et X_2 suivent une loi de densité f_X. Sur cet appareil, les deux composants sont montés en série, c'est-à-dire que l'arrêt d'un composant provoque l'arrêt de l'appareil.

(1) On note Y la durée de fonctionnement de l'appareil. Justifier que $(Y \geq t) = (X_1 \geq t) \cap (X_2 \geq t)$.

(2) Démontrer que $f_Y = 2.f_X.(1 - F_X)$ où F_X est la fonction de répartition de X_1 et X_2.

(3) On considère à présent que $f_X(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}.1_{\mathbb{R}^+}(x)$. Donner l'expression de F_X, puis calculer $E(X)$.

(4) Calculer l'espérance de Y. Quel est son sens physique ?

Exercice 4 (4 *pts*)

Soit un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

$P(X=x, Y=y)$	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	0.2	0.2	α
$X=1$	0.1	0.1	0
$X=2$	0.2	0	0.1

(1) Donner la valeur de α en justifiant.

(2) Donner la loi marginale de Y. Calculer son espérance et sa variance.

(3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

(4) On pose : $Z = X + 2.Y - 1$. Déterminer la loi de Z, puis calculer son espérance.

Questions de cours

1) Il s'agit d'une liste non ordonnée de p éléments pris dans un ensemble de n éléments, tous distincts.

ex. tirage de 3 ~~fois~~ nombres distincts entre 1 et 10.

On peut obtenir $(1-2-8)$ ou $(\cancel{3}-\cancel{6}-\cancel{7})$
$= (2-1-8)$

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{où} \quad A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

nombre de possibilité du tirage n°1

n°2

possibilités du dernier tirage

Donc $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

A.N. $C_{102}^{100} = \dfrac{102!}{100!\;2!} = \dfrac{\left(\frac{102!}{100!}\right)}{2!} = \dfrac{102 \times 101}{2 \times 1} = \dfrac{10302}{2} = 5151$

2) Formule des probabilités totale :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) \quad \text{car } (A_k) \text{ disjoints et forment un système complet d'événement}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k)$$

Or $P(B \cap A_1) = P_B(A_1) \times P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1)$

Donc $P_B(A_1) = \dfrac{P_{A_1}(B) \times P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{P_{A_1}(B) \times P(A_1)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k)}$

Cette formule sert à inverser les problème : calculer les P_B en fonction des $P_{A_k}(B)$.

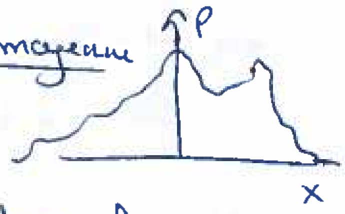
3) ~~Le théorème de transfert dit~~ :

Par définition $E(X^m)$ est le moment d'ordre m.

Le théorème de transfert dit :

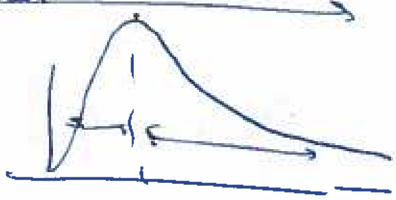
$$E(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m . f_X(x)\, dx \quad \text{si} \quad \int_{\mathbb{R}} |x^m| . f_X(x)\, dx < +\infty$$

- Le moment d'ordre 1 est l'espérance : il donne la moyenne théorique



- Les moment centré réduit d'ordre 2 est la variance : il donne la dispersion

- ——— 3 est l'asymétrie, qui donne l'asymétrie de la variable

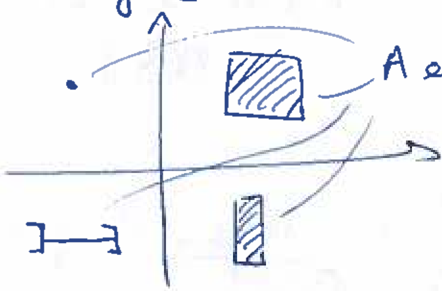


- ——— 4 est le kurtosis (normalisé) il donne la courbure de la variable

4) - Ω est l'univers des possibles # résultats de l'expérience.
- T est la tribu = l'ensemble de tous les événements que l'on peut obtenir à partir de l'expérience.
- P est la ~~Probabi~~ mesure de probabilité qui associe à un événement de T une valeur de probabilité entre 0 et 1.

- Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, $T = \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$, et P est la mesure de Lebesgue.

ex. $A \in T = \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$



A est la réunion d'un ensemble d'ouverts et de fermés de $\mathbb{R}^2$.

5) Notons f_X et f_Y les densités de X et Y, $f_{X,Y}$ leur loi conjointe.
Si X et Y sont indépendantes, alors :
$\forall (x,y) \in (X(\Omega), Y(\Omega))$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$.

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_X(x) \cdot y\, f_Y(y) \cdot dx \cdot dy$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\, dy\right)$$
$$= E(X) \cdot E(Y)$$

Donc $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$
X et Y sont alors décorrélées.

Exercice 1

1) a) il y a $\binom{10}{4} = C_{10}^4$ possibilités

b) Soit ils viennent, soit ils ne viennent pas.
$\hookrightarrow \binom{8}{2}$ restant $\qquad \hookrightarrow \binom{8}{4}$
Il y a donc $\binom{8}{2} + \binom{8}{4}$ possibilités

c) Soit l'un vient, soit l'autre, soit aucun des deux
Il y a donc $\binom{8}{3} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4}$
pas lui ni l'autre !

2) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$Card(\Omega) = \binom{10}{4}$
$P(X=0) = \dfrac{Card(X=0)}{Card(\Omega)} = \dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}$ 7 filles

$$P(X=1) = \frac{\binom{7}{3} * \binom{3}{1}}{\binom{10}{4}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{4}}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{3}{3}}{\binom{10}{4}}$$

k	$P(X=k)$
0	$\binom{7}{4} / \binom{10}{4}$
1	$\binom{7}{3} \times 3 / \binom{10}{4}$
2	$\binom{7}{2} \times 6 / \binom{10}{4}$
3	$7 \times 1 / \binom{10}{4}$

Exercice 2

1) Formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) . P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) . P(C_n)$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} \times a_n + \frac{1}{6} \times b_n + \frac{1}{6} \times c_n$$

De même :

$$b_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{6} c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{6} b_n + \frac{2}{3} c_n$$

2)
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}}_{M \text{ = matrice "stochastique"}} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Par récurrence immédiate.
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

On accepte l'expression de M^n donnée par le sujet (l'erratum a été donné au début du test).

3) $\cancel{M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) J \xrightarrow[n\infty]{} 0 \cdot I + \frac{1}{3} J = \frac{1}{3} \cdot J}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2^n} a_0 + \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) \times (a_0 + b_0 + c_0) \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{a_0+b_0+c_0}{3} \\ b_n = \dfrac{1}{2^n} b_0 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \xrightarrow[n\infty]{} \text{''} \\ c_n = \dfrac{1}{2^n} c_0 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \xrightarrow[n\infty]{} \text{''} \end{cases}$$

Cela signifie que, quelle que soit la position initiale du mobile, il a la même probabilité d'être sur chaque sommet après de nombreux instants.

Exercice 3

1) Pour que l'appareil fonctionne plus qu'une durée t $(Y \geq t)$, il faut que le composant 1 fonctionne plus que t $(X_1 \geq t)$, et le composant 2 aussi $(X_2 \geq t)$.

On a donc $(Y \geq t) = (X_1 \geq t) \cap (X_2 \geq t)$

2) Soit $t > 0$. $\quad$ $P(Y \geq t)$ car loi continue

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = 1 - P(Y \geq t)$$

$$= 1 - P(X_1 \geq t \cap X_2 \geq t)$$

$$= 1 - P(X_1 \geq t) \cdot P(X_2 \geq t) \quad \text{car } X_1, X_2 \text{ indépendants}$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 \leq t)) \cdot (1 - P(X_2 \leq t))$$

$$= 1 - [1 - F_{X_{(1)}}(t)] \cdot [1 - F_{X_{(2)}}(t)]$$

$$= 1 - 1 + 2F_X(t) - [F_X(t)]^2.$$

$$= 2F_X(t) - [F_X(t)]^2$$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = 2f_X(t) - (2f_X(t)) \cdot F_X(t)^1$$

$$= 2f_X(t) \cdot (1 - F_X(t)).$$

On a montré que $f_Y = 2f_X \cdot [1 - F_X]$

3) $\circ$ Soit $t \geq 0$, $F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^t$

$$= -e^{-\frac{1}{5}t} + e^0 = \boxed{1 - e^{-\frac{1}{5}t}}$$

$\circ$ $E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx \overset{IPP}{=} \left[x(-1)e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times (-1) e^{-\frac{1}{5}x} dx$

$$E(X) = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = \left[-5e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 - (-5)e^0 = \boxed{5.}$$

Les élèves peuvent aussi reconnaître une loi exponentielle s'ils s'en rappellent !

4) $$E(Y) = \int_0^{+\infty} y \times f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y \cdot 2 f_X(y) \cdot [1 - F_X(y)]\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2y \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}y} \times \left[\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{5}y}\right] dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2}{5} y\, e^{-\frac{1}{5}y} e^{-\frac{1}{5}y}\,dy = \int_0^{+\infty} y \left(\frac{2}{5} e^{-\frac{2}{5}y}\right) dy$$

De deux choses l'une. Soit ils font le même calcul que q.3 pour trouver $\boxed{E(Y) = \frac{5}{2}}$ avec une IPP, soit ils remarque que Y suit la même loi que X avec un paramètre $\frac{2}{5}$ au lieu de $\frac{5}{2}$ ...

E(Y) est l'espérance de durée de vie de l'appareil.

Exercice 4.

1) On a $1 = \sum_{i,j} P(X = i \cap Y = j) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + \alpha + 0{,}1$

$$= 0{,}9 + \alpha$$

$$\to \boxed{\alpha = 0{,}1}$$

2) • Formule : $P(Y=y) = \sum_{x=0}^{2} P(Y=y \cap X=x)$

On somme les lignes du tableau :

y	-1	0	1
$P(Y=y)$	$0,5$	$0,3$	$0,2$

• $E(Y) = \sum_{y=-1}^{1} y\,P(Y=y) = -1 \times 0,5 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2$
$= -0,5 + 0,2 = \boxed{-0,3}$

• $E(Y^2) = \sum_{y=-1}^{1} y^2 P(Y=y) = 1 \times 0,5 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2$
$= 0,5 + 0,2 = 0,7.$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 0,7 - [-0,3]^2 = 0,7 - 0,09$
$\boxed{= 0,61}$

3) Elles ne sont <u>pas</u> indépendantes car

Loi de X :

x	$P(X=x)$
0	0,5
1	0,2
2	0,3

$P(Y=0 \cap X=2) = 0$, mais
$P(Y=0) \times P(X=2) = 0,3 \times 0,3 = 0,09 \neq 0$

4) valeurs de Z :

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	-3	-1	1
$X=1$	-2	0	2
$X=2$	-1	1	3

Loi de Z :

z	$P(Z=z)$
-3	0,2
-2	0,1
-1	0,4
0	0,1
1	0,1
2	0

$E(Z) = -0,6 - 0,2 - 0,4 + 0,1 + 0,3 = \boxed{-0,8}$