E.N.T.P.E.
Cours de Probabilités –Second devoir surveillé

Instructions et indications importantes

Les étudiants ont droit à une feuille de notes recto verso au format A4. Les calculatrices sont autorisées. Une table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est fournie en fin d'énoncé.
La qualité de la rédaction (précision, concision et soin) sera prise en compte dans la notation.
Le barème est uniquement donné à titre indicatif et pourra être modifié ultérieurement.

Questions de cours (5 *pts*)

(1) Démontrer les expressions de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale.

(2) Donner le cas d'usage le plus classiquement associé aux lois suivantes :

(a) loi exponentielle	(b) loi de Poisson	(c) loi de Pascal
(d) loi binomiale	(e) loi gamma	(f) loi du Khi-deux à n degrés de liberté.

(3) Montrer que la loi géométrique est la discrétisation de la loi exponentielle.

(4) Énoncer le Théorème Central Limite, expliquer son intérêt, et en donner une illustration graphique.

(5) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ, inconnu, et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un échantillon de n réalisations de X. Montrer que la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments fournissent la même expression de l'estimateur de λ.

Exercice 1. Du côté de la VA Aménagement et Politiques Urbaines (3 *pts*)

Vous organisez une réunion de concertation pour présenter un projet à différents membres d'associations. Maîtrisant la pratique du *mailing* à la perfection, vous avez envoyé 90 invitations individuelles. D'expérience, vous savez que les membres des associations sont d'ordinaire bénévoles et ne peuvent se libérer pour ce genre de réunion qu'une fois sur trois. La collectivité dans laquelle vous êtes employé dispose de trois salles de 30, 35 et 40 places respectivement. Quelle est la plus petite salle que vous pouvez choisir sachant que vous voulez être sûr que tous les invités présents pourront rentrer dans la salle réservée avec une probabilité supérieure à 90 %.

Exercice 2. Du côté de la VA Transport (4 *pts*)

On considère un bus de ligne du C3 entre les arrêts *Vaulx-en-Velin la Grappinière* (arrêt n°1) et *Laurent Bonnevay - Astroballe* (arrêt n°10). Ce bus est vide quand il arrive au premier arrêt. On suppose qu'aux 9 premiers arrêts, aucun passager ne descend du bus. En revanche, le nombre de passagers souhaitant monter dans le bus à l'arrêt n, noté X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Les $(X_n)_{n\in[1,9]}$ sont bien entendu indépendants.

(1) On note Y la loi que suit le nombre de passagers dans le bus lorsque celui-ci arrive à l'arrêt n°10 (les passagers attendant à *Laurent Bonnevay – Astroballe* n'ont donc pas eu l'occasion de monter). Exprimez Y en fonction des X_n. Puis, en rappelant une des propriétés de la loi de Poisson, donnez la loi de Y.

(2) La capacité d'un bus est de 70 passagers. Quelle est la probabilité que des passagers (au moins un) n'ait pas pu monter dans le bus avant l'arrêt *Laurent Bonnevay – Astroballe*.

(3) On fait à présent l'hypothèse que tous les usagers arrivés à un arrêt parviennent effectivement à monter dans le bus en se serrant un peu. On suppose qu'un usager a une probabilité $p = 1/3$ de descendre du bus à l'arrêt *Laurent Bonnevay – Astroballe*. Soit Z la variable aléatoire du nombre de passagers descendant du bus à cet arrêt.

(a) Après avoir explicité le sens de l'événement $\{Y = n\}$, déterminer en justifiant la loi de $Z \mid \{Y = n\}$.

(b) Prouver par le calcul que Z suit une loi de Poisson et expliciter son paramètre.

Exercice 3. Du côté de la VA Bâtiment (5 *pts*)

En hiver, on suppose que la température T intérieure d'un logement suit une loi normale de moyenne 20 et de variance 4, et est indépendante de la température extérieure. On considère par ailleurs que cette température extérieure E suit une loi normale de moyenne 5 et de variance 9. Les températures sont exprimées en degrés. On note C l'énergie nécessaire (en kWh) pour chauffer l'appartement un jour donné, sachant que l'on a la relation $C = ke^{T-E}$ où k est une constante réelle dépendant du dispositif de chauffage.

(1) Quelle proportion de la population souhaite se chauffer au-dessus de 24 degrés ?

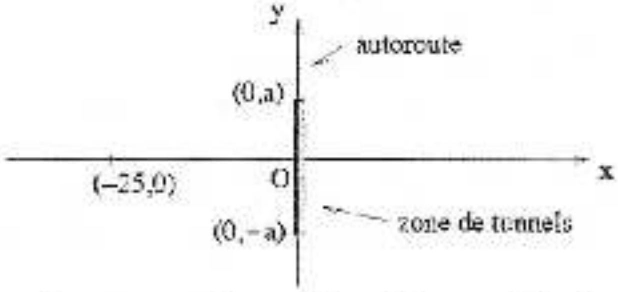
(2) Sachant qu'un jour donné, il fait entre -5 et 5 degrés, qu'elle est la probabilité qu'il gèle.

(3) Après avoir explicité la loi de $T - E$, déterminer la loi de C en fonction de la constante k.

(4) Une entreprise a conçu un nouveau dispositif de chauffage. Pour accéder à une norme de qualité, elle doit prouver que 95 % des utilisateurs consommeraient moins de 10 kWh. Déterminer la valeur limite de k pour remplir que critère.

(5) Des relevés de température T ont été effectués dans 100 logements. La moyenne empirique $\bar{t}$ calculée à partir de ces relevés est de 19,4 degrés. En explicitant la loi de la variable aléatoire $\bar{T}$, calculer quelle était la probabilité que $\bar{t}$ n'appartienne pas à l'intervalle de températures [19,4; 20,6] ?

Exercice 4. Du côté de la VA Environnement (3 *pts*)



On étudie le déplacement d'une grenouille pendant sa migration annuelle. Elle est repérée par sa position (X_n, Y_n) au temps n. À $t = 0$, elle part d'une mare située sur un plan au point de coordonnées $(-25; 0)$. Puis, à chaque pas de temps entier $n \geq 0$, la grenouille avance de $+1$ suivant l'axe des abscisses et se déporte en même temps de $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ suivant l'axe des ordonnées. On a ainsi $X_n = -25 + n$, qui est donc déterministe, et $Y_n = Y_{n-1} + U_n$ où les variables U_n sont indépendantes et identiquement distribuées de sorte que $P\left(U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(U_n = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

(1) Donner l'espérance et la variance de chaque U_n. Que représente $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$?

Sur l'axe des ordonnées, on construit une nouvelle autoroute. Un crapauduc est creusé pour permettre le passage des grenouilles entre les points $(0; -a)$ et $(0; a)$, comme indiqué sur la figure ci-contre. Si la grenouille arrive dans cette zone, elle passe dans le tunnel, sinon, elle se fait écraser...

(2) Exprimer à partir de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite la probabilité que la grenouille passe par le tunnel. Puis déterminer la valeur de a telle que la probabilité de survie de la grenouille soit de 90 %.

---

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\Phi(x)$

DS 2 - 2016-2017 - Probabilités

Questions de cours

1) Soit $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$. On sait que X est le nombre de succès de n expériences de Bernoulli B_i identiques et indépendantes, de probabilité de succès p.

On a donc $X = \sum_{i=1}^{n} B_i$ où $P(B_i = 0) = 1-p$, $P(B_i = 1) = p$, avec $E(B_i^m) = p$ $= 0^m \times 1-p + 1^m \times p$

Donc $V(B_i) = p(1-p)$.

$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) = \underline{np}$ par linéarité de l'espérance

$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} V(B_i) = \underline{np(1-p)}$ car les B_i sont indépendants.

2) a- Une loi exponentielle mesure des durées de vie = durées de phénomènes aléatoire.

b- Une loi de Poisson compte le nombre d'occurrences d'un phénomène aléatoire.

c- Une loi de Pascal donne le rang de $r$ième succès dans un schéma de Bernoulli.

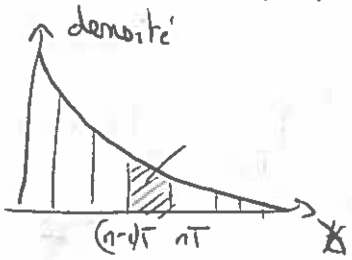
d- Une loi binomiale compte le nombre de succès dans n expériences de Bernoulli

e- Une loi Gamma mesure la durée de vie d'un phénomène aléatoire complexe ($\sum \mathcal{E}(\lambda)$)

f- Une loi du Khi 2 à n degrés de liberté permet de donner la variabilité de la variance empirique, c'est aussi la somme de n ~~...~~ variables ~~...~~ au carré suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On discrétise le temps en pas de durée T.

On a $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$



Soit N la variable aléatoire donnant le rang du pas de temps où le phénomène se produit. On a $\{N = n\} = \{X \in [(n-1)T, nT]\}$

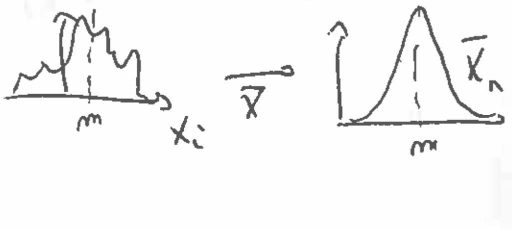
Donc $P(N = n) = P(X \in [(n-1)T, nT]) = F_X(nT) - F_X((n-1)T) = 1 - e^{-nT\lambda} - 1 + e^{-(n-1)T\lambda}$

$= (e^{-\lambda T})^{n-1}(1 - e^{-\lambda T}) = q^{n-1} p$ en notant $p = e^{-\lambda T}$ et $q = 1-p \in [0,1]$

Ainsi, $N \sim \mathcal{G}(p)$.

4) TCL : Soit $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de v.a.r indep, identi. distribuées de même moyenne m et variance σ^2, alors $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow[n\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$ où $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Concrètement, X_i peut être quelconque, lorsque l'on aura une moyenne calculée avec un grand échantillon, $\overline{X}_n$ suivra une loi normale.



5) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, λ inconnu et $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un échantillon observé.

a. Méthode des moments pour estimer λ.

On a $E(X) = \lambda$ et $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un bon estimateur de $E(X)$.

Donc λ est bien estimé par $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

b. Méthode du maximum de vraisemblance,

$$L(\vec{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda}\cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i!}$$

$$\ln(L(\vec{x},\lambda)) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\lambda) + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{x_i!}\right)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\vec{x},\lambda))}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda} + 0$$

Cette expression vaut 0 lorsque $n = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

c. les deux expression sont bien identiques.

Exercice 3

1) $P(T > 24) = P\left(\frac{T-20}{\sqrt{4}} > \frac{24-20}{2}\right) = P\left(\frac{T-20}{2} > 2\right)$ où $\frac{T-20}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9772$ d'après la table

$= 2{,}28\ \%$ de la population.

2) $$P_{E\in[-5,5]}(E<0) = \frac{P(E\in[-5,0])}{P(E\in[-5,5])} = \frac{P\left(\frac{E-5}{3}\in[-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}]\right)}{P\left(\frac{E-5}{3}\in[-\frac{10}{3}, 0]\right)}$$ où $\frac{E-5}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$

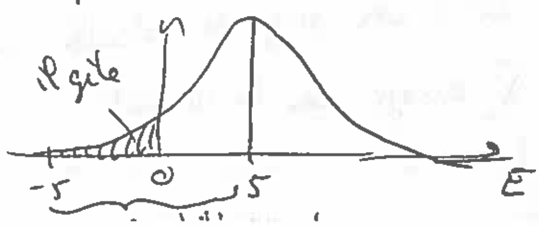
$$= \frac{\phi(-\frac{5}{3}) - \phi(-\frac{10}{3})}{\phi(0) - \phi(-\frac{10}{3})}$$ où $\phi(-\frac{10}{3}) = 1 - \phi(\frac{10}{3})$ et $\phi(-\frac{5}{3}) = 1 - \phi(\frac{5}{3})$

avec $\phi(0) = 0{,}5$ et $\phi(\frac{10}{3}) \approx 1$ d'après la table

$\phi(\frac{5}{3}) = 0{,}9515$

$0{,}2586$

$$= \frac{1 - \phi(\frac{5}{3}) - 1 + \phi(\frac{10}{3})}{0{,}5 - 1 + \phi(\frac{10}{3})} = \frac{\overset{\approx 1}{\phi(\frac{10}{3})} - \phi(\frac{5}{3})}{\underset{\approx 1}{\phi(\frac{10}{3})} - 0{,}5} = \frac{0{,}0485}{0{,}5} = 0{,}097 \approx 10\ \%$$



3) $T-E \sim \mathcal{N}(20-5, 4+9)$ par la propriété de stabilité par somme de la loi normale $\mathcal{N}(15, 13)$. Soit $c \in \mathbb{R}^+$

$$P(C<c) = F_C(c) = P(k e^{T-E} < c) = P\left(e^{T-E} < \frac{c}{k}\right) = P\left(T-E < \ln \frac{c}{k}\right)$$

$$= P\left(\frac{T-E-15}{\sqrt{13}} < \frac{\ln \frac{c}{k} - 15}{\sqrt{13}}\right) \text{ où } \frac{T-E-15}{\sqrt{13}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \phi\left(\left(\ln \frac{c}{k} - 15\right)/\sqrt{13}\right)$$

$$f_C(c) = \frac{\partial}{\partial c} F_C(c) = \frac{1}{c\sqrt{13}} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln \frac{c}{k} - 15}{\sqrt{13}}\right]^2}}_{\phi' = \mathcal{N}(0,1)}$$

C ~~est~~ suit une loi log-normale

4) On veut k tq $P(C < 10) = 0{,}95 = \phi\left(\frac{\ln \frac{10}{k} - 15}{\sqrt{13}}\right)$ d'après la q.3.

Donc d'après la table, $\frac{\ln \frac{10}{k} - 15}{\sqrt{13}} = 1{,}65$

Donc $\ln 10 - \ln k = 15 + 1{,}65\sqrt{13}$

$\Rightarrow k = \exp(\ln 10 - 15 - 1{,}65\sqrt{13}) \approx 8.10^{-9}$ = faible valeur, mais c'est une constante... ça arrive.

5) D'après le TCL : $\overline{T} \sim \mathcal{N}\left(\underset{E(T)}{20}, \underset{\frac{V(T)}{n}}{\frac{4}{100}}\right)$

Donc $P(\overline{T} < 19{,}4) + P(\overline{T} > 20{,}6) = P\left(\frac{\overline{T}-20}{\sqrt{4/100}} < \frac{19{,}4-20}{\sqrt{4/100}}\right) + P\left(\frac{\overline{T}+20}{\sqrt{4/100}} > \frac{20{,}6-20}{\sqrt{4/100}}\right)$

$= \underline{\phi(-3)} + (1-\phi(3)) = = 2 - 2\phi(3)$ où $\phi(3) = 0{,}9986$

$= \approx 0{,}0028 = \underline{0{,}28\ \%}$: très faible

Exercice4

1). $E(U_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{0}$. $E(U_n^2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$V(U_n) = E(U_n^2) - E(U_n)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$

- $U_1 + \dots + U_n$ représente Y_n, la position sur les ordonnées de la grenouille après n pas de temps.

2) $P(Y_{25} \in [-a, a]) = P(U_1 + \dots + U_{25} \in [-a, a])$ où les U_i sont i.i.d, de même variance et moyenne, le TCL s'applique

$=$

$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} U_i \sim \mathcal{N}\left(E(U_i); \frac{V(U_i)}{25}\right)$ donc $\sum_{i=1}^{25} U_i \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{25\times V(U_i)}_{12,5})$

Donc $P(Y\in[-a,a]) = P\Big(\underbrace{\frac{\sum U_i - 0}{\sqrt{12,5}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \in \left[-\frac{a}{\sqrt{12,5}}, +\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right]\Big) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) - \phi\left(-\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right)$

$= 2\phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) - 1$

- $P(Y\in[-a,a]) = 0,9$

$\iff 2\phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) - 1 = 0,9 \iff \phi\left(\frac{a}{\sqrt{12,5}}\right) = 0,95$

$\iff \frac{a}{\sqrt{12,5}} = 1,65 \Rightarrow a = 1,65\times\sqrt{12,5} = \underline{5,83\ m}$

Exercice 2

1) $Y = \sum_{i=1}^{9} X_i$ où $X_i \sim \mathcal{P}(5)$.

Par stabilité par somme de la loi de Poisson, on a $Y \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{9} 5) = \mathcal{P}(45)$

2) On peut remarquer qu'il suffit que $Y > 70$ pour qu'un usager ait été empêché de monter avant. On cherche donc :

$P(Y>70)$ où $Y\sim\mathcal{P}(45)$. Comme $45>15$, on peut approcher Y par $\mathcal{N}(45, 45)$

Donc $P(Y>70) = P\left(\frac{Y-45}{\sqrt{45}} > \frac{70-45}{\sqrt{45}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{25}{\sqrt{45}}\right) = 1-\phi(3,72)$
$\simeq 1-1=0$

c'est négligeable.

3) a) $\{Y=n\}$ signifie que n individus sont dans le bus à l'ouverture des portes à Laurent Bonnevay.

$Z|\{Y=n\}$ ~~suit~~ une loi binomiale car représente le nombre de succès dans une répétition de n expé de Bernoulli, toutes identiques et indépendantes, où "succès" = "l'individu i souhaite descendre du bus" avec $p=\frac{1}{3}$.

Donc $Z|\{Y=n\} \sim Bi(n,p)$ où $p = 1/3$.

b) $P(Z=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(Z=k \mid Y=n)}_{=0 \text{ si } n<k} \times P(Y=n)$

$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ où $\lambda = 45$ d'après q1.

$$P(Z=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{\cancel{n!}} e^{-\lambda} \lambda^k \lambda^{n-k} \times p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\lambda q)^{n-k} \times \frac{e^{-\lambda q}}{e^{-\lambda q}}$$

$$= e^{-\lambda} \times e^{\lambda q} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda_q)^m}{m!}}$$

$= 1$ car $\mathcal{P}(\lambda_q)$

$$= e^{\lambda(q-1)} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda_p)^k}{k!}}$$

Donc $Z \sim \mathcal{P}(\lambda_p)$

Exercice 1

$n = 90$ invitations ont été envoyées.

Chaque invitation a $\frac{1}{3}$ de chance d'avoir une réponse positive.

X, la v.a.r donnant le nombre de représentants venu à la réunion, est le nombre de succes dans une répétition de n expérience de Bernoulli où le succes est : "le représentant i vient à la réunion".

Donc $X \sim \mathcal{B}i(90, \frac{1}{3})$.

$E(X) = np = 30$, $V(X) = npq = 20$

Comme $n \geq 30$ et $npq \geq 15$, on peut approximer X par $\mathcal{N}(np, npq)$ d'après le TCL. ($np = 30$, $npq = 20$)

On veut connaitre N nombre de places dans la salle de réunion, pour que

$P(X \leq N) = 0{,}90$

$$= P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq \frac{N-30}{\sqrt{20}}\right) \quad \text{où } \frac{X-30}{\sqrt{20}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \Phi\left(\frac{N-30}{\sqrt{20}}\right)$$. D'après la table, $\frac{N-30}{\sqrt{20}} = 1{,}28$

$\Rightarrow N = 30 + 1{,}28 \times \sqrt{20} = 35{,}7$. On doit donc prendre la salle de 40 places.