COURS DE MÉTHODES DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE.

Test Final.

J.P. Lebacque.

Equipe enseignante: Aurélie Bousquet, Nicolas Chiabaut, Thierry Garaix, Emmanuel Courdon, Megan Khoshyaran, Jean-Patrick Lebacque, Salim Mammar, Kwami Sossoe

Mars 2016

Durée du test: 2 heures.

- Il vous est recommandé de passer environ 20 mn sur le premier exercice (Kruskal), 20 mn sur le second (Ordonnancements), 40 mn sur le troisième (Programmation Dynamique) et 40 mn sur le quatrième (Programmation linéaire).
- Documents autorisés: polycopié, notes de cours.
- Les appareils électroniques (calculettes, téléphones portables, tablettes...) sont interdits.

1 Exercice 1: algorithme de Kruskal.

Le gestionnaire d'un parc naturel prévoit de connecter 7 parkings pour véhicules de tourisme notés A, B, C, D, E, F, G à l'entrée du parc notée O. Il cherche à minimiser l'impact des routes de connection sur le parc et souhaite donc minimiser la longueur totale des routes de connection. Le tableau ci-après contient les distances en km entre parkings et entre parkings et entrée du parc. Expliquez pourquoi le réseau cherché par le gestionnaire constitue un arbre de KRUSKAL dans un graphe que vous préciserez (sommets, arcs, poids des arcs).

Appliquez l'algorithme de KRUSKAL pour trouver cet arbre.

	O	A	B	C	D	E	F	G
O	-	7.1	6.1	6.7	4.8	8.1	7.3	4.1
A		-	6.9	5.9	7.2	5.0	8.2	8.0
B			-	3.5	7.9	5.5	9.0	6.5
C				-	8.3	5.2	8.7	7.2
D					-	7.4	4.3	3.9
E						-	6.8	7.4
F							-	4.2
G								-

Tableau 1

2 Exercice 2: Ordonnancements.

Résolvez le problème d'ordonnancements simples dont les données sont décrites par le tableau qui suit:

Tâches	Durée	Contraintes
A	10	Début − 2
B	12	Début + 5, Fin(A) + 2
C	8	Début + 7, Début (B) + 1/2 (B) − 2
D	30	Fin(A)
E	15	Début (D) − 1/3 (D) + 2, Fin (B) + 3
F	9	Fin(C) − 6, Début(E) − 1/3 (E) + 5

1/2 B = 6
+2
8
1/3 D = 10
1/3 E = 5

Le format de description des contraintes est celui du cours. Par exemple, "Début (B) + 1/2 (B) + 2" dans la liste de contraintes de C signifie que C ne peut démarrer que 2 jours après le milieu de la tche B.

Il est demandé d'utiliser la *Méthode Potentiel-Tâches* à l'exclusion de toute autre.

Faites la liste des sommets, de leurs prédécesseurs et de leurs successeurs, la liste des arcs et de leurs coûts. Calculez la durée minimale du projet, et pour chaque tâche sa date au plus tôt, sa date au plus tard, sa marge, compte tenu de ce que l'on souhaite terminer le projet avec une marge de 3 jours sur sa durée minimale. Quelles sont les tâches critiques?

3 Exercice 3: Programmation dynamique. Accès à un système de transport macroscopique.

On considère un système de transport simplifié, représenté par la figure ci-après, et que l'on cherche à réguler.

Plus précisément il s'agit de répartir dans le temps la demande de déplacement en amont du système, $D(t)$. La demande en amont du système est filtrée: seule une partie $u(t)$ de cette demande peut accéder au système au temps t. L'entrée du système est représentée par une restriction de capacité μ en amont de laquelle se forme une file d'attente $q(t)$. Il s'agit donc de gérer au mieux l'accès $u(t)$ de manière à minimiser les $q(t)$ et aussi à limiter la quantité d'usagers qui n'accèderont au système qu'en fin de période de gestion.

- l'horizon du contrôle est $T = 3$;
- la file d'attent initiale est $q(0) = 2$;
- la demande $D(t)$ est donnée par le tableau suivant:

t	0	1	2
$D(t)$	2	4	5

  (unité de demande: milliers d'usagers, unité de temps la 1/2 heure);

- la capacité est $\mu = 3$;
- pour chaque période $(t) = [t, t+1]$ la dynamique de la file d'attente est donnée par:

(1) $$q(t+1) = \max[0, q(t) + u(t) - \mu]$$

- le critère d'optimisation est donné pour chaque période $(t) = [t, t-1]$ par $q(t)^2 + M(D(t) - u(t))$ qui inclut un coût pour la file d'attente et un coût pour la demande différée $D(t) - u(t)$. On prendra $M = 2$;
- un critère terminal $q(T)^3/3\mu$ tient compte du coût de la file d'attente après T.

Finalement le problème de gestion de l'accès au système s'écrit:

$$
\text{(2)} \qquad \min \; q(T)^3/3\mu + \sum_{t=0}^{T-1} q(t)^2 + M(D(t) - u(t))
\quad \left| \begin{array}{ll}
q(0) = 2 & \\
q(t+1) = \max\,[0, q(t) + u(t) - \mu] & \forall t = 0, \dots T-1 \\
0 \le u(t) \le D(t) & \forall t = 0, \dots T-1 \\
u(t), q(t) \in \mathbb{N} & \forall t = 0, \dots T-1
\end{array} \right.
$$

On considère que toutes les quantités considérées (les $u(t)$, $q(t)$) sont entières.

1. Il s'agit d'un problème de programmation dynamique. Quelles sont les variables d'état, de commande.

2. Montrez que l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman du problème. s'écrit.

$$
\text{(3)} \qquad V_{t+1}(q(t+1)) = \min_{q(t), u(t)} V_t(q(t)) + q(t)^2 + M(D(t) - u(t))
\quad \left| \begin{array}{l}
q(t+1) = q(t) + u(t) - \mu \\
\max\,[0, \mu - q(t)] \le u(t) \le D(t) \\
u(t), q(t) \in \mathbb{N}
\end{array} \right.
$$

pour $t = 0, \dots T-1$, et la valeur terminale optimale $q(T)$ est obtenue en résolvant

$$
\text{(4)} \qquad \min_{q(T)} \left[V_T(q(T)) - q(T)^3/3\mu \right]
$$

pour l'instant final $T = 3$.

3. Résolvez le problème (2) en résolvant par récurrence l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (3) et l'équation terminale (4). On veillera à chaque pas de temps à bien préciser les états atteignables pour limiter le volume de calculs.

4 Exercice 4: Programmation linéaire. Production.

La fabrication de 3 produits P1, P2, P3 dans une usine requiert des moyens humains du Service Technique ST, de la main-d'oeuvre MdO et du Service administratif SA. Les disponibilités horaires sont précisées dans le tableau ci-après, ainsi que les besoins unitaires et les gains par unité produite. Par exemple la production d'une unité P1 requiert en moyenne 1 heure de ST, 10 heures de MdO, et 2 heures de SA, pour un bénéfice unitaire de 10. les disponibilités courantes du ST sont de 100 heures.

Produits	ST	MdO	SA	Gain
P1	1	10	2	10
P2	1	4	2	6
P3	1	5	6	4
Disponibiltés	100	600	300	

Question 1 L'entreprise veut déterminer son plan de production optimal pour les produits P1, P2, P3 dans son usine. Ecrivez le programme linéaire qui résoud ce problème. Résolvez ce programme par l'algorithme du simplexe.

Question 2 On constate que la solution optimale trouvée ne prévoit pas de production du produit P3. Or l'entreprise souhaite pour des raisons commerciales produire un minimum de produit P3. L'entreprise envisage d'abord d'imposer une production de 10 unités P3. Résolvez le problème de production optimale en intégrant cette contrainte. Comparez le bénéfice obtenu avec le bénéfice obtenu dans la question 1.

Question 3 Une autre possibilité consiste à augmenter le prix unitaire du produit, le faisant passer de 4 à $4+p$. Calculez les coûts réduits résultants dans la base optimale obtenue dans la question 1. Déduisez-en la valeur minimale de p pour que la production de P3 devienne non nulle. Exprimez le bénéfice en fonction de p et de la quantité de P3 produite.

Les questions 2 et 3 sont résolubles avec peu de calculs.

PEQUIN
Paul
1HG7

DS de MRO :

17/30

17/20

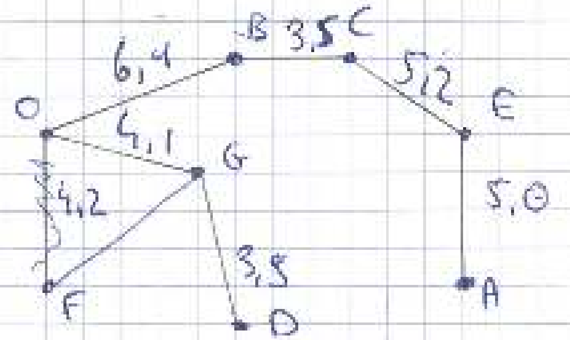
exercice 1 : algorithme de Kruskal :

On cherche ici à connecter tous les parkings et l'entrée du parc entre eux en minimisant la longueur totale des routes de connection.

On veut donc créer un arbre maximal, ie contenant tous les points, et faire le ~~plus court~~ minimum de chemin entre chaque point, et au niveau global.

5/5 D'où l'obtention d'un arbre ~~maximal~~ couvrant à poids minimal avec pour sommets l'entrée O et les parkings A, B, C, D, E, F, G ; pour arcs, les liaisons entre les sommets (OA, OB, AC, ...) et poids les distances entre les sommets : Appliquons l'algorithme de Kruskal.

arcs :
BC : 3,5
DG : 3,5
OG : 4,1
FG : 4,2
~~DF : 4,5~~
~~OD : 4,8~~
AE : 5,0
CE : 5,2
~~BE : 5,5~~
~~AC : 5,9~~
OB : 6,1



poids de ce graphe : 32

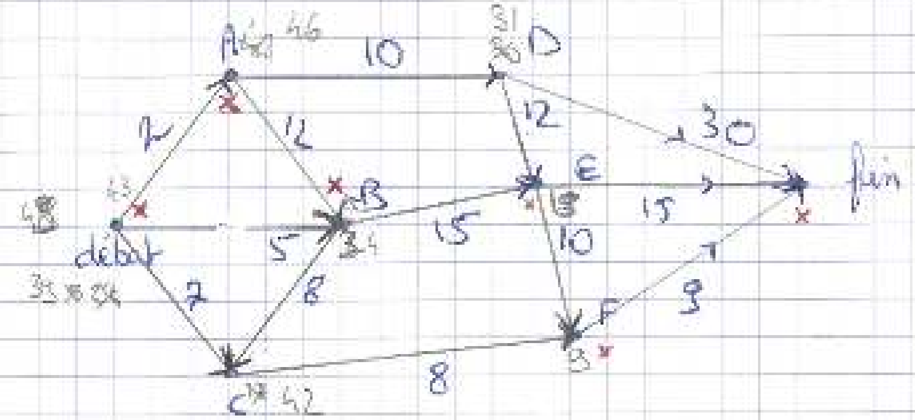
exercice 2 : Ordonnancements :

sommets : début, A, B, C, D, E, F, fin.

prédécesseurs :
de début : aucun
de A : début
de B : début, A
de C : début, B
de D : A
de E : D, B
de F : C, E
de fin : D, E, F

successeurs :
de début : A, B, C
de A : B, ~~E~~ D
de B : C, E
de C : F
de D : E, fin
de E : F, fin
de F : fin

de fin : aucun



liste des Arcs et coûts :

durée minimale du projet : 48 jours

début → A : 2
début → B : 5
début → C : 7
A → B 12
A → D : 10
B → C : 8
B → E : 15
C → F : 8
D → E : 12
D → fin : 30
E → fin : 15
E → F : 10
F → fin : 9

4/5

	date au plus tôt	date au plus tard	marge
début	0	0	0
A	2	2	0
B	14	14	0
C	22	31 25	9 3
D	12	18 17	6 5
E	29	29	0
F	39	39	0
fin	48	48	0

on souhaite terminer le projet avec une marge de 3 jours sur la durée minimale, donc la date au plus tard de fin devient 51, on augmente donc toute les dates au plus tard de 3 et les marges de 3. ✓

d'où

	date + tôt	date + tard	marge.
début	0	3	3
A	2	5	3
B	14	17	3
C	22	34 28	12 6
D	12	21 20	9 8
E	29	32	3
F	39	42	3
fin	48	51	3

2

Les tâches critiques sont donc début, A, B, E, F, fin.

exercice 4. Programmation linéaire production

1) On veut le plan de production optimal pour P_1, P_2, P_3, on veut donc le gain maximal z_{max} :

$$\max\ 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 = z.$$

$x_{1,2,3}$ = nombre de produits $P_{1,2,3}$ réalisés

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 600 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\iff \max\ z' = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 + \quad \text{forme standard.}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + u_1 = 100 \\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 + u_2 = 600 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + u_3 = 300. \\ x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$$

on veut X tel que $AX = B$.

I

		e	-4-p				
z	0	-10	-6	-4	0	0	0
u_1	100	1	1	1	1	0	0
s → u_2	600	10	4	5	0	1	0
u_3	300	2	2	6	0	0	1
	b	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3

← T_{i1} ← T_s ← T_{i3}

$A = 100 - \frac{1}{10} \times 600 = 40$

$B = 1 - \frac{1}{10} \times 10$

$C = 0 - \frac{1}{10} \times 1$

$T_i' = T_i - \frac{T_{ie}}{T_{se}} \times T_s$

$T_s' = \frac{T_s}{T_{se}}$

II

			e	1-r			
z	600	0	-2	1	0	1	0
s → u_1	40	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{5}{10}$	1	$-\frac{1}{10}$	0
x_1	60	1	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0
u_3	180	0	$\frac{12}{10}$	5	0	$-\frac{2}{10}$	1
	b	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3

IV

z	$\frac{2200}{3}$	0	0	$\frac{16}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	≥ 0
x_2	$\frac{400}{6}$	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	
x_1	$\frac{100}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{16}{15}$	0	
y_3	100	0	0	4	-2	0	1	
	b	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	

6/6

la ligne de coûts est positive, donc la solution optimale correspondant à la base optimale réalisable $B = (x_2, x_1, y_3)$

$\Rightarrow \left\{ x_2 = \frac{400}{6} = \frac{200}{3},\ x_1 = \frac{100}{3} \right.$ est une solution optimale du programme linéaire

(avec $x_3 = y_1 = y_2 = 0$.

2) on impose maintenant $x_3 = 0$.

d'où le problème : $\max z = 10x_1 + 6x_2$

1/2,5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 90 \\ 10x_1 + 4x_2 + y_2 = 550 \\ 2x_1 + 2x_2 + y_3 = 240 \end{cases}$$

exercice 3 : programmation dynamique

1) les variables d'états sont $q(t)$ pour $t \in [0, T]$.

1/1

les variables de commandes sont $u(t)$ pour $t \in [0, T]$.

2) L'équation d'Hamilton Jacobi Bellman s'écrit

$V_{i+1}(E_{i+1}) = \min \left(V_i(E_i) + q(t)^2 + \Pi (D(t) - u(t)) \right)$.

d'où

$$\begin{cases} q(t+1) = \max \{0, q(t) + u(t) - \mu\} & \forall t = 0, \dots, T-1 \\ 0 \leq u(t) \leq D(t) & \forall t \in [0, T-1] \\ u(t), q(t) \in \mathbb{N} & \end{cases}$$

0/2

soit $V_{t+1}(q(t+1)) = \min \left[V_t(q(t)) + q(t)^2 + \Pi(D(t) - u(t)) \right]$

si $q(t) + u(t) - \mu \geq 0$

et alors $u(t) \geq \mu - q(t)$

or $u(t) \geq 0$.

$q(t+1) = q(t) + u(t) - \mu$

$\max\{0, \mu - q(t)\} \leq u(t) \leq D(t)$

$u(t), q(t) \leq u(t) \leq D(t)$