Feuille 1/2

HICAUBÉ Hélène
TPEX Groupe 6

10 Novembre 2009

14/20

Test d'Analyse n° 5

Exercice 3. /6

$$\begin{cases} -u''(x) = N(u(x)) + h(x) & , x \in]0,\pi[\\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

$h \in L^2(0,\pi)$ et $N(z) = \dfrac{1}{2(1+z^2)}$

$\exists \gamma \in]0,1[\ / \ \forall a,b \in \mathbb{R}^2 \quad a \neq b$

$$-\gamma \leq \frac{N(a)-N(b)}{a-b} \leq \gamma$$

1. $\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \neq n^2 \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$R_\lambda : \begin{cases} L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi) \\ h \longmapsto R_\lambda(h) = u \ / \ \begin{matrix} -u''(x) - \lambda u(x) = h(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{matrix} \end{cases}$$

on cherche u en le décomposant sur la base hilbertienne : $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \sin(nx)$, où $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \sin(nx)$

alors $u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n \cos(nx)$

$$u''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n \sin(nx)$$

Donc en réintroduisant dans le problème linéaire vérifié par u, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n \sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \sin(nx)$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n(n^2-\lambda) = h_n$ en identifiant terme à terme

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{h_n}{n^2-\lambda}$ pour $\lambda \neq n^2$

on justifie la dérivation terme à terme par le fait que $h \in L^2(0,\pi)$

1 $\Rightarrow \|u'(x)\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n \cos(nx)\right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{n h_n}{n^2-\lambda}\right|^2 \underbrace{|\cos nx|^2}_{\leq 1} < +\infty$ car $h \in L^2(0,\pi)$

$\Rightarrow \|h\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |h_n|^2 < +\infty$

et $\|u''(x)\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n \sin(nx)\right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{n^2 h_n}{n^2-\lambda}\right|^2 < +\infty$

on a alors que

$$\|u\|_2 = \|R_\lambda(h)\|_2$$

or $\|u\|_2 = \| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n^2-\lambda} \sin(nx)\|_2$

0,5 $\leqslant \frac{1}{d(\lambda,\Sigma)} \| \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \sin(nx)\|$

$= (1/\Sigma) \|h\|_2$

Donc $\underline{\|R_\lambda(h)\|_2 \leq (1/\Sigma)\|h\|_2}$ $\Rightarrow$ R_λ est continue sur $L_2(\Omega)$

2. $\lambda \notin \Sigma$ $\quad T_\lambda : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ tq

$$T_\lambda(u) = R_\lambda(N(u) - \lambda u + h)$$

i. Notons que $\underline{R_\lambda \text{ est un opérateur linéaire}}$

en effet $\forall g, g \in L_2^2(0,\pi)$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$R_\lambda(\mu g + g) = u_{\mu g + g}$$

tq $\quad -u''_{\mu g+g}(x) - \lambda u_{\mu g+g}(x) = (\lambda g + g)(x) = \lambda g(x) + g(x)$

or $\left| \begin{array}{l} g(x) = -u''_g(x) - \lambda u_g(x) \text{ où } u_g = R_\lambda(g) \\ g(x) = -u''_g(x) - \lambda u_g(x) \text{ où } u_g = R_\lambda(g) \end{array} \right.$

Donc $\underline{\mu u_g + u_g = u_{\mu g + g}}$

Donc $\forall u, v \in L^2(0,\pi)$

$$\|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\|_2 = \|R_\lambda(N(u) - \lambda u + h) - R_\lambda(N(v) - \lambda v + h)\|_2$$

$$= \|R_\lambda(N(u) - \lambda u - (N(v) - \lambda v))\|_2$$

$$\leq (1/\Sigma) \|N(u) - \lambda u - (N(v) - \lambda v)\|_2$$

$\S$ 1.

$$\left|\frac{N(u) - \lambda u - N(v) + \lambda v}{u - v}\right|$$

$$= \left|\frac{N(u) - N(v)}{u - v} - \lambda\right|$$

$\Rightarrow \quad -\gamma - \lambda \leq \left|\frac{N(u) - N(v)}{u - v}\right| \leq \gamma - \lambda$

2 $\quad \Rightarrow \|N(u) - \lambda u - N(v) + \lambda v\|_2 \leq \max\{|\gamma - \lambda|, |\gamma + \lambda|\} \|u - v\|_2$

Donc $\underline{\|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)\|_2 \leq \frac{\max\{|\gamma-\lambda|, |\gamma+\lambda|\}}{\Sigma} \|u - v\|_2}$

ii) pour $x=0$ $\quad \Sigma \geq 1$ $\quad$ car $d(0,\Sigma) > 1$

Donc $0 < \frac{1}{\Sigma} < 1$

0,5 $\quad$ or $\gamma \in]0,1[$

Donc $\quad \underline{0 < \frac{\gamma}{\Sigma} < 1}$

3. Donc $\underline{\lambda = 0 \Rightarrow T_\lambda \text{ est contractante}}$

car $L^2(0,\pi)$ est un Banach
et $\max\left|\frac{|\gamma-\alpha|, |\gamma+\alpha|}{\Sigma}\right| = \frac{\gamma}{\Sigma} \in]0,1[$

Donc $\quad \exists!\, u \in L^2(0,\pi) \;/\; T_\lambda(u) = u$
d'après le <u>théorème du point fixe</u>

Donc $\quad \exists!\, u \in L^2(0,\pi) / \quad u = R_\lambda(N(u) - \lambda u + R)$

1 $\quad$ ie $\quad \exists!\, u \in L^2(0,\pi) / \; -u''(x) - \lambda u(x) = N(u(x)) - \lambda u(x) + R(x)$
$u(0) = u(\pi) = 0$

$\Rightarrow \quad \exists!\, u \in L^2(0,\pi) / \begin{cases} -u''(x) = N(u(x)) + R(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$

<u>Ainsi le problème aux limites considéré admet une unique solution</u>

<u>Exercice 2.</u> $\quad$ /5

$H = L^2(0,1)$

1. $\quad K_0 = \mathbb{R}\{e_0, e_1\}$

soit $g \in K_0$ $\quad \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} / g(t) = a e_0(t) + b e_1(t)$
g quelconque $\quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} / g(t) = a + bt$

or e_0 et e_1 sont dans H.

1 $\quad \int_0^1 |e_0(t)|^2 dt = \int_0^1 1\, dt = 1 \quad < +\infty$

$\int_0^1 |e_1(t)|^2 dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} < +\infty$

Donc $g \in H$

D'où $\quad \underline{K_0 \subset H}$

2. $\alpha > 0$ $\quad f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad t \mapsto \sin(\alpha t)$

soit $p(f_\alpha)$ la projection de f_α sur K_0

1 - K_0 est complet on peut donc appliquer le théorème de projection orthogonale :

$$d(f_\alpha, K_0) = \| f_\alpha - p(f_\alpha) \| \quad \text{et sa 2e partie,}$$

$$\left(f_\alpha - P(f_\alpha)\right) \in K_0^{\perp}$$

Donc • $P(f_\alpha) \in K_0 \Rightarrow \exists\, a, \beta \in \mathbb{R}^2 \ / \ P(f_\alpha) = a e_0 + \beta e_1$

• $f_\alpha - P(f_\alpha) \in K_0^{\perp} \Rightarrow \forall u \in K_0 \ \langle f_\alpha - P(f_\alpha) | u \rangle = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle f_\alpha - P(f_\alpha) | e_0 \rangle = 0 \\ \langle f_\alpha - P(f_\alpha) | e_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

1

on a alors le système :

$$\begin{cases} \langle \sin(\alpha t) - a e_0(t) - \beta e_1(t) \,|\, e_0(t) \rangle = 0 \\ \langle \sin(\alpha t) - a e_0(t) - \beta e_1(t) \,|\, e_1(t) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \sin(\alpha t) - a - \beta t \,|\, 1 \rangle = 0 \\ \langle \sin(\alpha t) - a - \beta t \,|\, t \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \sin(\alpha t) | 1 \rangle - a \langle 1 | 1 \rangle - \beta \langle t / 1 \rangle = 0 \\ \langle \sin(\alpha t) | t \rangle - a \langle 1 | t \rangle - \beta \langle t | t \rangle = 0 \end{cases}$$

or $\langle 1 | 1 \rangle = \int_0^1 1 \, dt = 1$

$\langle 1 | t \rangle = \langle t / 1 \rangle = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$

$\langle t | t \rangle = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$

$\langle \sin \alpha t | 1 \rangle = \int_0^1 \sin(\alpha t)\, dt = \left[-\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha} \right]_0^1 = -\frac{\cos \alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$

$\langle \sin \alpha t | t \rangle = \int_0^1 \sin(\alpha t)\, t \, dt = \left[-\frac{t \cos(\alpha t)}{\alpha} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\cos \alpha t}{\alpha} \, dt$

$$= -\frac{\cos \alpha}{\alpha} + \left[\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha^2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{\cos \alpha}{\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \alpha}{\alpha} - a - \frac{\beta}{2} = 0 \\ \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos \alpha}{\alpha} - \frac{a}{2} - \frac{\beta}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2\alpha} + \frac{\cos \alpha}{2\alpha} + \frac{a}{2} + \frac{\beta}{4} = 0 & (1) \\ \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos \alpha}{\alpha} - \frac{a}{2} - \frac{\beta}{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

Feuille 4/2

HICAUBE Hélène

$(1)+(2) \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} = \frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{4} = \frac{1}{12}\beta$

$12\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \beta$

puis dans (1) $\quad a = \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\alpha} - 6\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right)$

$a = \frac{4}{\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{\alpha} - 6\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}$

1

donc $p(g_\alpha) = \frac{4}{\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{\alpha} - \frac{6\sin\alpha}{\alpha^2} + t\left(12\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right)\right)$

On peut à partir de là calculer $d(g_\alpha, K_0) = \|g_\alpha - p(g_\alpha)\|$

on a $\|g_\alpha - p(g_\alpha)\|^2 = \|g_\alpha\|^2 - \|p(g_\alpha)\|^2$

et $\|g_\alpha - p(g_\alpha)\|^2 = \|g_\alpha\|^2 + \|p(g_\alpha)\|^2 - 2(g_\alpha | p(g_\alpha))$

$\Rightarrow \quad \|g_\alpha - p(g_\alpha)\|^2 = \|g_\alpha\|^2 - \langle g_\alpha | p(g_\alpha)\rangle$ (afin de faciliter les calculs)

Exercice 4 : 4

$H^2(0,1) = \{v \in L^2(0,1) / v' \in L^2(0,1), v'' \in L^2(0,1)\}$

$A(u,v) = \int_0^1 u''(s)v''(s) + 3u'(s)v'(s) + (2-e^{-s})u(s)v(s)\,ds$

1. . A est symétrique car $A(u,v) = A(v,u)$

. A est bilinéaire car $\forall u,v,w \in H^2(0,1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$A(\alpha u+v, w) = \int_0^1 (\alpha u+v)''(s)w''(s) + 3(\alpha u+v)'(s)w'(s) + (2-e^{-s})(\alpha u+v)(s)w(s)\,ds$

$= \alpha\int_0^1 u''(s)w''(s) + 3u'(s)w'(s) + (2-e^{-s})u(s)w(s)\,ds$

$+ \int_0^1 v''(s)w''(s) + 3v'(s)w'(s) + (2-e^{-s})v(s)w(s)\,ds$

$= \alpha A(u,w) + A(v,w)$

. coercivité :

$|A(u,u)| = \int_0^1 u''^2(s) + 3u'^2(s) + (2-e^{-s})u^2(s)\,ds$

$\geq \int_0^1 u''^2(s)\,ds + 3\int_0^1 u'^2(s)\,ds + \underbrace{(2-e^{0})}_{=1}\int_0^1 u^2(s)\,ds$

$\geq \min(1,3,1)\underbrace{\int_0^1 u''^2(s) + u'^2(s) + u^2(s)\,ds}_{(u|u)}$

1 $\quad \geq \|u\|^2_{H^2(0,1)}$

Donc <u>A est coercive sur $H^2(0,1)$</u>

- <u>Continuité</u>.

A est une forme bilinéaire symétrique

et $A(u,u) \geq \|u\|_{H^2(0,1)} \geq 0$

et $A(u,u) = 0 \Rightarrow \|u\|_{H^2(0,1)} = 0 \Rightarrow u = 0$

Donc A est aussi définie positive

c'est donc un produit scalaire

On peut donc lui appliquer le Th de Cauchy schwartz.

$|A(u,v)| \leq A(u,u)^{1/2} A(v,v)^{1/2}$

$= \left(\int_0^1 u''^2(s) + 3u'^2(s) + (e-e^{-1})u^2(s)\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v''^2(s) + 3v'^2(s) + (e-e^{-1})v^2(s)\, ds\right)^{1/2}$

$\leq \max(1, 3, e-e^{-1}) \left(\int_0^1 u''^2(s) + u'^2(s) + u^2(s)\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v''^2(s) + v'^2(s) + v^2(s)\, ds\right)^{1/2}$

$= 3\, [u/u][v/v]$

$= \underline{3\, \|u\|_{H^2(0,1)} \|v\|_{H^2(0,1)}}$

$\Rightarrow$ A est <u>donc continue</u> sur $H^2(0,1)$

<u>A est bien une forme bilinéaire, symétrique continue coercive sur $H^2(0,1)$</u>

<u>2°-</u> $f \in L^2(0,1)$

(P): $u \in H^2(0,1)$ / $\forall u, v \in H^2(0,1)$ $A(u,v) = \langle f, v \rangle$

- $L: v \mapsto \langle f, v \rangle$ est continue car:

$|\langle f | v \rangle| = \left|\int_0^1 f(x) v(x)\, dx\right|$

$\underset{\text{Cauchy schwartz}}{\leq} \underbrace{\left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}}_{\leq K^{1/2}} \left(\int_0^1 |v(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$

$\leq K \left(\int_0^1 v(x)^2\, dx\right)^{1/2}$

or $v''^2(x) \geq 0$ et $v'^2(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$

donc $|\langle f | v \rangle| \leq K \left(\int_0^1 v''^2(x) + v'^2(x) + v^2(x)\, dx\right)^{1/2}$

$= K \|v\|_{H^2(0,1)}$

Donc <u>L est continue dans $H^2(0,1)$</u>, <u>$L \in H'^2(0,1)$</u>

Donc d'après le <u>théorème de Lax-Milgram</u>

1 $\exists!\, u \in H^2(0,1),\ \forall v \in H^2(0,1) \quad A(u,v) = L(v)$

soit $\exists!\, u \in H^2(0,1),\ \forall v \in H^2(0,1) \quad A(u,v) = \langle g, v\rangle$

<u>le problème possède une unique solution sur $H^2(0,1)$</u>

<u>Exercice 2</u> : /5 $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$g : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{4at^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ \frac{4a(t-\pi)^2}{\pi^2} & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

1 g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ et en $\frac{\pi}{2}$

prolongeons g sur $[-\pi, 0]$ par

$$g : t \longmapsto \begin{cases} \frac{4at^2}{\pi^2} & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{4a}{\pi^2}(t+\pi)^2 & \text{sur } -\pi \leq t \leq -\pi/2 \end{cases}$$

- g est périodique de période 2π
- $g(-t) = \frac{4at^2}{\pi^2} = g(t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$

0 $\quad = \frac{4a(t-\pi)^2}{\pi^2} = \frac{4a(t+\pi)^2}{\pi^2} = g(t)$ sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

on a de même $g(-t) = g(t)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$
$g(-t) = g(t)$ sur $[-\pi, -\pi/2]$

Donc g ~~est paire~~ $\Rightarrow$ <u>$a_n(g) = 0$</u> $\forall n \in \mathbb{N}$

et $b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{4a}{\pi^2}(t+\pi)^2 \sin(nt)\,dt + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4a}{\pi^2} t^2 \sin(nt)\,dt}_{=0} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4a}{\pi^2}(t-\pi)^2 \sin(nt)\,dt\right)$$

$$= \frac{4a}{\pi^3}\left(\frac{-[(\pi^2 n^2 - 8)\cos\frac{n\pi}{2} + 4(n\pi\sin(\frac{n\pi}{2}) + 2\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n})]}{4n^3} + \frac{\pi^2((n\pi)^2 - 8)\cos\frac{n\pi}{2} - 4(n\pi\sin\frac{n\pi}{2} + ((n\pi)^2 - 2)\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} - 2n\pi\overbrace{\sin(n\pi)}^{=0}}{4n^3}\right)$$

$$= \frac{a}{(n\pi)^3}\left(\underbrace{(\pi^2 - 1)((n\pi)^2 - 8)\cos\frac{n\pi}{2}}_{\substack{= 1 \text{ pour } n = 0,4,8 \\ = -1 \text{ pour } n = 2,6,10 \\ = 0 \text{ pour } n \text{ impair}}} + 4(\pi^2 - 1)(n\pi\underbrace{\sin\frac{n\pi}{2}}_{\substack{= 0 \text{ pour } n \text{ pair} \\ = 1 \text{ pour } n = 1,5,9\ldots \\ = -1 \text{ pour } n = 3,7,11\ldots}}) - 4(\pi^2(n\pi^2 - 2) - 2)\underbrace{}_{(-1)^n}\right)$$

1 <u>g est C^1 par morceaux et continue sur $[-\pi, \pi]$</u>

donc $\underline{g = SF(g)}$

$\rightarrow \underline{g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \forall x \in (-\pi, \pi)}$

2. La 2° question se résoud grâce au <u>théorème de Parseval</u>

P

Correction Test 2.

Exercice 1.

$P_K(g)$ est la meilleure approximation de g par une droite au sens de la norme L^2

Exercice 2.

1. g est impaire

2. $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt)\,dt$

$$b_{2p+1} = \frac{-32a}{\pi^3 (2p+1)^3} + \frac{16a(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi^2} \qquad \text{Gibbs} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$b_{2p} = 0$$

$$\sum \ldots = \frac{\pi^2}{16}$$

Exercice 3:

1. $|u_n| \leq \frac{|R_n|}{n^2 - \lambda}$

$$\left\| \sum \frac{R_n}{n^2-\lambda} \sin nx \right\|^2 \leq \sum \frac{|R_n|^2}{n^2-\lambda} \leq \frac{\sum |R_n|^2}{d(\lambda, \Sigma)} \leq \frac{\|R_n\|^2}{d(\lambda, \Sigma)}$$

2. pour $\lambda = 0$ $d(\lambda, \Sigma) = d(0, \Sigma) = 1$ $\quad ((d(n^2, 0)) = 1)$