Deuxième test de calcul scientifique durée : 2h

Exercice 1 (1,3,1,1,1,2,2,2)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) - \arctan(y(t)) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h_n = t_{n+1} - t_n$ et on note y_n l'approximation de $y(t_n)$ obtenue par le schéma d'Euler implicite (dit aussi rétrograde).

1) Montrer que y_{n+1} vérifie une équation de la forme

$$F(y_{n+1}, y_n, h_n) = 0$$

avec $F(y, y_n, h_n) = \arctan(y) + P(y, y_n, h_n)$ où P est un polynôme en y à déterminer.

2) On note $f_n(y) = F(y, y_n, h_n)$. Etablir le tableau des variations de f_n, f_n', f_n'' et f_n'''

3) y_n étant fixé, montrer que suivant la valeur du pas h_n, f_n admet deux racines éventuellement confondues ou bien aucune.

4) Dans cette question $n = 0$. Donner un exemple de valeur numérique de h_0 telle que

a) $f_0(y) = F(y, y_0, h_0)$ admet 2 zéros distincts

b) $f_0(y) = F(y, y_0, h_0)$ n'admet aucun zéro.

5) On veut résoudre $f_n(y) = F(y, y_n, h_n)$ par la méthode de Newton avec la donnée initiale $y^{(0)} = y_n$

Ecrire la relation qui définit $y^{(k)}$ pour $k \geq 1$.

6) On pose $h_0 = 0,3$. En utilisant l'algorithme de la question **5**, donner les différentes itérations qui conduisent au calcul numérique de y_1 à 10^{-6} près.

7) De façon similaire calculer numériquement y_2 avec $h_1 = h_0$.

8) Justifier qu'on ne peut pas poursuivre ce schéma en conservant le pas $0,3$ pour calculer une approximation de $y(0,9)$.

<u>Exercice 2</u> (1, 1, 2, 3)

Pour résoudre numériquement $y'(t) = f(y(t),t)$ on utilise le schéma numérique à 1 pas $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(y_n, h_n, t_n)$

où

$$\Phi(y,h,t) = a\, f(y,t) + b\, f\left(y + \frac{h}{2} f(y,t),\, t + \frac{h}{2}\right) + c\, f(y + h f(y,t),\, t+h)$$

avec a, b, c des réels compris entre 0 et 1.

1) Donner 3 exemples de triplets (a,b,c) permettant de retrouver des schémas numériques classiques.

2) Dans cette question et les suivantes on supposera que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times [t_0, T]$ et K-lipschitzienne en y. A quelles conditions sur (a,b,c) obtient-on un schéma convergent d'ordre ≥ 1 ?

3) même question pour un schéma convergent d'ordre ≥ 2

4) même question pour un schéma convergent d'ordre ≥ 3