ANALYSE - TEST 1 - DUREE 2h00 - 2017/2018 - Sans document

Toutes les intégrales sont considérées au sens de la mesure de Lebesgue notée λ.

EXERCICE 1 (5 pts)

On pose $I = [1, +\infty[$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in I$:

$$f_n(t) = \frac{n^2 t \sin(\frac{1}{n} + t^2)}{n^4 + n^2 t + \cos^2(n+t)} \exp(-t^2 - \frac{1}{n}).$$

1) On note $g(t) = \exp(-t^2)$ pour $t \in I$. Montrer que $g \in L^1(I, \lambda)$.

2) Montrer que $\forall t \in I, \mid f_n(t) \mid \leq g(t)$.

3) Montrer rapidement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^1(I, \lambda)$.

4) Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur I.

5) En déduire en précisant le raisonnement $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_I f_n d\lambda$.

EXERCICE 2 (3 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \exp(-x^2 - y^2)$$

et

$$K = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} f(x, y) dx dy.$$

Montrer à l'aide d'un changement de variables que cette intégrale existe au sens de Lebesgue et calculer K.

EXERCICE 3 (3 pts)

On considère l'équation $F(x) = 0$ pour $x \in I = [-1, 1]$, avec

$$F(x) = \frac{1}{500}x^5 + \frac{3}{200}x^4 - \frac{89}{500}x^3 + \frac{117}{1000}x^2 + \frac{103}{125}x - \frac{21}{50}.$$

On pose $G(x) = x - F(x)$. On admet, pour $k < 1$ constante, que

$$\forall x \in I, F(x) - x \in I, F(x) \in I \text{ et } \mid F'(x) - 1 \mid \leq k, \mid F'(x) \mid \leq 0.9$$

1) Montrer que F et G sont des contractions strictes de I dans I.

2) Montrer que l'équation $F(x) = 0$ a une unique solution dans I.

EXERCICE 4 (4 pts)

1) On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par

$$f(t) = \exp(-\mid t \mid) \text{ et } g(t) = 1 \text{ si } t \in [-1, 1], 0 \text{ sinon.}$$

Calculer les transformées de Fourier de f et g.

2) En utilisant la propriété de Parseval-Plancherel, en déduire l'expression de

$$J = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(s)}{s(1+s^2)} ds.$$

EXERCICE 5 (3 pts)

On définit pour $x \in \mathbb{R}^+$ et un paramètre $a > 0$, la fonction I_a par:

$$I_a(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\ln(1+xt^2)}{a^2+t^2} dt.$$

1) Montrer que la fonction I_a est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et exprimer $I_a'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

2) En déduire le calcul de $I_a(x)$ pour $x \neq \frac{1}{a^2}$, à une constante près.

3) Déduire de ce qui précède la constante et donner l'expression de $I_a(x)$.