ANALYSE - TEST 2 - DUREE 2h30 - 2017/2018 - Sans document

EXERCICE 1 (4 pts)
Les objets suivants définis pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont-ils des distributions sur $\mathbb{R}$ (i.e. des éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) ?

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. $T_1(\phi) = \int_{\mathbb{R}} (x+a)\phi(x)dx$.

2) $T_2(\phi) = |\phi''(1) - \phi(0)|^2$.

3) $T_3(\phi) = \int_{\mathbb{R}} |\exp(2x) - \cos(x)| \frac{\phi(x)}{x} dx$.

EXERCICE 2 (5 pts)
On note $I = [0,1]$, $E = C^{\infty}(I)$ et pour $f \in E$, $\| f \|_{\infty} = \sup\{| f(t) |, t \in I\}$.

1) $f^+ = \text{Max}(f,0)$ pour $f \in E$. On pose $f \in E, f \neq 0, M(f) = \frac{1}{\| f^+ \|_{\infty}} \int_I f^2(t)dt$, si $f^+ \neq 0$, $M(f) = 0$ si $f^+ = 0$. M est-elle une norme sur E ?

2) On pose pour $f \in E$ et $p \in [1, +\infty[$, $\| f \|_p = (\int_I (f(t))^p dt)^{\frac{1}{p}}$. On rappelle que c'est une norme sur E et que $(E, \| . \|_p)$ est un espace vectoriel normé. On considère:

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \to & f' \end{array}$$

i) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = t^n$, calculer $\| f_n \|_p$ et $\| f'_n \|_p$.

ii) Etudier $\lim_{n \to +\infty} \frac{\| f'_n \|_p}{\| f_n \|_p}$.

iii) T est une application linéaire de E dans E. T est-elle continue sur E ?

EXERCICE 3 (6 pts)
λ désigne la mesure de Lebesgue. On pose $I =]0,1[$. Soit $f \in L^2(I)$. On considère le problème aux limites (P):

$$(P) \qquad \begin{cases} -[\exp(-x)u'(x)]' + (1+\exp(-x^2))u(x) = f(x), x \in I, \\ \\ \qquad\qquad u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On rappelle que $H_0^1 = \{v \in L^2(I), v' \in L^2(I), v(0) = v(1) = 0\}$ muni du produit scalaire $(v \mid w) = \int_I [v'w' + vw] \, d\lambda$ et de la norme induite $\| v \| = \sqrt{\int_I [(v')^2 + v^2] d\lambda}$ est un espace de Hilbert réel.

1) Ecrire la formulation variationnelle de (P) sous la forme:

"Trouver $u \in V = H_0^1(I), \forall v \in V, a(u,v) = l(v)$", en précisant a et l.

2) On pose $L(v) = \int_I fv d\lambda$. Montrer que L est linéaire et continue sur V. On montrera qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in V, | L(v) | \leq C \| v \| ;$$

3) On pose $J(v,w) = \int_I [\exp(-x)v'(x)w'(x) + (1 + \exp(-x^2))v(x)w(x)] dx$.

i) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$, telle que

$$\forall v, w \in V, | J(v,w) | \leq M \| v \| \quad \| w \| ;$$

ii) Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $J(v,v) \geq \alpha \| v \|^2$.

4) En déduire qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u,v) = l(v)$.

EXERCICE 4 (5 pts)
On considère, l'équation différentielle d'inconnue T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\beta T' + \gamma T = 0 \qquad (1)$$

avec pour $x \in \mathbb{R}$, $\beta(x) = x$, $\gamma(x) = 1 + x$, $g(x) = \exp(-x)$.

1) On pose $S = \beta T$ avec $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

i) Cette définition est-elle correcte ?

ii) En déduire une expression de (1) en fonction de S et S'.

2) On note (2) l'équation (1) récrite à l'aide de S.

i) Résoudre l'équation (2), d'inconnue S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

ii) Résoudre l'équation d'inconnue T, $\beta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

iii) Déterminer une solution particulière T_p de l'équation d'inconnue T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\beta T = T_g.$$

iv) Déduire de 2 i), 2 ii) et 2 iii) une résolution de (1) en T.