Mécanique des Milieux Continus - Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Lundi 22 Janvier 2018

Documents autorisés : *Seuls l'annexe B et une feuille manuscripte A4 recto-verso sont autorisés. Le cas échéant, on pourra utiliser sans justifications (mais sans en avoir les points évidemment) les réponses données dans le sujet afin de pouvoir poursuivre la résolution des problèmes.*

Premier problème (14 points) : Creusement d'un tunnel profond et pose d'un soutènement. L'objet de ce problème est de modéliser le creusement d'un tunnel dans un massif de sol et la pose d'un soutènement en béton. Le problème réel étant complexe (3D), on se propose ici d'en faire une modélisation simplifiée. Pour cela, le tunnel et le massif sont représentés par un milieu cylindrique creux de longueur infinie suivant l'axe (Oz), de rayon intérieur R_s (tunnel) et de très grand rayon extérieur R_m (on aura donc $R_m \gg R_s$). Le massif est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope de modules de Lamé λ_m et μ_m. La gravité est négligée et une pression p_0 est appliquée sur la surface extérieure (en $r = R_m$). Sur la paroi du tunnel, une pression p_s est également appliquée. Cette pression simule la présence du front de taille et elle aura tendance à diminuer au cours du creusement. C'est pourquoi on la pose sous la forme $p_s = \Lambda p_0$ avec $0 < \Lambda < 1$.

L'ensemble de ces conditions impliquent que le champ de déplacement dans le massif en coordonnées cylindriques prend la forme $\vec{u}_m = u_m(r)\vec{e}_r$ où u est une fonction inconnue de la variable r.

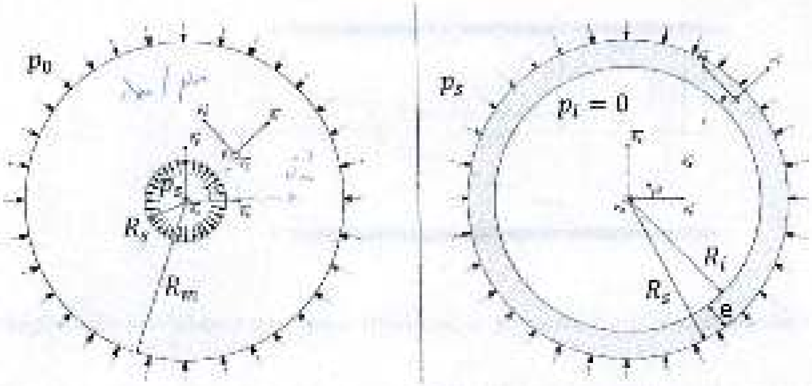

FIGURE 1 – Représentation du massif à gauche et du soutènement à droite.

1. En utilisant l'équation de Lamé-Navier, déterminer l'équation différentielle dont u_m est solution.
2. Montrez que la solution *générale* de cette équation peut se mettre sous la forme $u_m(r) = A_m r + \frac{B_m}{r}$ où A_m et B_m sont deux constantes à déterminer (la démonstration ne consistera pas à simplement introduire cette solution dans l'équation différentielle ...).
3. Calculez les tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ et des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.
4. Ecrivez proprement les conditions aux limites puis déterminez les valeurs de A_m et B_m en fonction de p_0, p_s et des coefficients élastiques λ_m et μ_m. En utilisant le fait que $R_m \gg R_s$ et en ne conservant que les termes de premier ordre, montrez que $A_m \approx -\frac{p_0}{2(\lambda_m+\mu_m)}$ et $B_m \approx -(\frac{p_0-p_s}{2\mu_m})R_s^2$
5. Achevez la détermination des tenseurs de déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ et des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, et du champ de déplacement. Tracez sur un seul graphe les variations des trois composantes non nulles de $\underline{\underline{\sigma}}$ entre R_s et R_m.
6. On se place dans la situation où aucun soutènement n'est posé : dans ce cas, avec l'avancée du tunnelier, la pression de confinement p_s va nécessairement tendre vers 0. Donc en supposant $p_s = 0$, donnez l'expression pour $r = R_s$ (c'est-à-dire à la surface du tunnel) du déplacement (qu'on notera u_m^0) et du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. En supposant que le matériau obéit au critère de Tresca ($\sigma_0 = 2\tau_0$), déterminez la pression limite p_ℓ conduisant à un début de plastification en $r = R_s$.

7. On considère maintenant un soutènement : il est représenté par un anneau (cylindre creux de faible épaisseur $e << R_s$) posé sur la surface du tunnel et constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope de modules λ_s et μ_s. Cet anneau s'étend donc entre r compris entre $R_i = R_s - e$ et R_s. Le massif exerce sur celui-ci une pression p_s en $r = R_s$. Sur sa face intérieure (donc dans le tunnel), la pression est nulle. On suppose que le champ de déplacement dans cet anneau, étant donnée la configuration de problème, est de la forme $\vec{u}_s = u_s(r)\vec{e}_r$ où u_s est une fonction inconnue de la variable r Justifier, sans faire de calcul, que $u_s(r) = A_s r + \frac{B_s}{r}$ où A_s et B_s sont deux constantes à déterminer.
8. Ecrivez proprement les conditions aux limites en $r = R_i$ et $r = R_s$, puis déterminez les valeurs de A_s et B_s en fonction de p_0, p_s et des coefficients élastiques λ_s et μ_s. En utilisant le fait que $R_s \gg e$ et en ne conservant que les termes de premier ordre, montrez que $A_s \approx -\frac{p_s}{4(\lambda_s+\mu_s)}\frac{R_s}{e}$ et $B_s \approx -(\frac{p_s}{4\mu_s})\frac{R_s^3}{e}$
9. En supposant une adhérence parfaite entre le soutènement et le massif (en $r = R_s$), déterminez p_s et le coefficient de déconfinement $\Lambda = \frac{p_s}{p_0}$. Que vaut le déplacement en $r = R_s$?
10. Application numérique : on donne $E_m = 1$GPa, $E_s = 30$GPa, $\nu_m = \nu_s = 0{,}25$, $R_s = 5$m, $e = 50$cm. Calculez le coefficient Λ.

Second problème (6 points) : Ecoulement d'un fluide non newtonien à viscosité variable. On considère l'écoulement permanent d'un fluide non newtonien incompressible dans une conduite cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R. Le comportement de ce fluide non newtonien est régi par la loi de comportement suivante : $\underline{\underline{\sigma}}^v = 2\eta\underline{\underline{D}}$ avec $\eta = \eta_0(1 + \frac{\alpha}{2}\|\underline{\underline{\sigma}}^v\|^2)$ où $\eta_0 > 0$ et $\alpha > 0$ sont des constantes caractéristiques du fluide. La norme $\|\underline{\underline{\sigma}}^v\|$ du tenseur des contraintes visqueuses se calcule comme la racine carré de la somme des carrés de ses composantes. Les actions mécaniques distance (force de pesanteur) étant négligées, on suppose que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système cylindrique est de la forme $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_z$ où $v(r, z)$ est une fonction à déterminer.

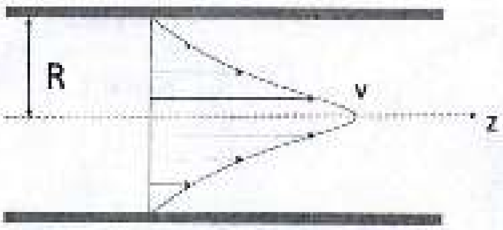

FIGURE 2 – Ecoulement d'un fluide non newtonien dans une conduite cylindrique

1. Montrez que l'hypothèse d'incompressibilité implique que le champ de vitesse est indépendant de la variable z.
2. Expliquez pourquoi l'équation de Navier-Stockes est inapplicable dans cette situation.
3. Calculez le tenseur $\underline{\underline{D}}$ des taux de déformations, puis justifiez que le tenseur des contraintes visqueuses ne dépend que de r et est nécessairement de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rz}(r) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{rz}(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Le tenseur des contraintes étant donné par $\underline{\underline{\sigma}} = -p(r, z)\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\sigma}}^v$, déduisez des équations indéfinies du mouvement que p ne dépend pas de r. Montrez ensuite que le gradient $\frac{dp}{dz}$ est constant. On posera $\frac{dp}{dz} = -G < 0$ de sorte que le fluide s'écoule de la gauche vers la droite.
5. Déduisez des résultats de la question précédente l'expression de σ_{rz} en fonction de G et de r, puis en utilisant la loi de comportement du fluide et en tirant parti de la condition aux limites en $r = R$, l'expression de la vitesse $v(r)$.
6. Déterminez la force $\vec{F}$ qu'exerce le fluide sur le tube par unité de longueur en utilisant uniquement le tenseur des contraintes, puis retrouvez ce résultat par le théorème d'Euler.
7. BONUS : Le fluide est-il rhéo-épaississant ou rhéo-fluidifiant ? Justifiez votre réponse.