

**Exercice 1 : Déformations (5 min – 3pts)**

- 1) Un solide de forme parallélépipédique se transforme de manière infinitésimale comme indiqué sur la figure 1. Déterminer le tenseur des petites déformations dans les axes  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  en fonction des dimensions initiales  $(L, P, H)$  et des dimensions finales  $(l, p, h)$  et de l'angle  $\omega$  en supposant le champ de déformation homogène.
- 2) Un solide de forme cylindrique se transforme de manière infinitésimale comme indiqué sur la figure 1. Déterminer le tenseur des petites déformations dans les axes  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  en fonction des dimensions initiales (rayon  $R$  et hauteur  $H$ ) et des dimensions finales (rayon  $r$  et hauteur  $h$ ) et de l'angle  $\omega$  dont a tourné la face supérieure par rapport à la face inférieure, en supposant le champ de déformation homogène.

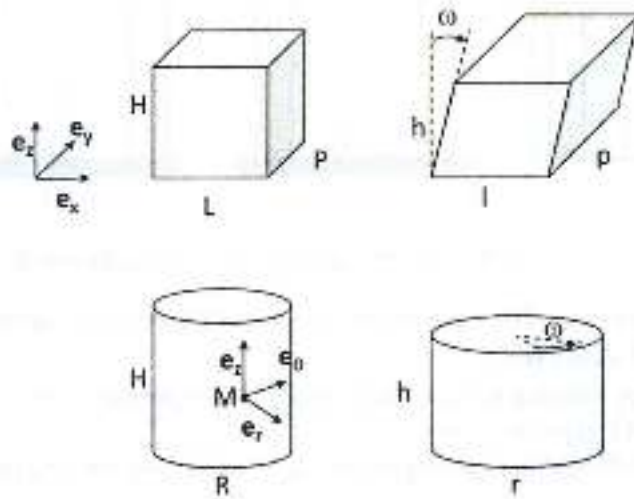


Figure 1 – Déformation d'un bloc parallélépipédique et d'un cylindre

**Exercice 2 : Contraintes (5 min – 3 pts)**

- 1) Un cube de côté L est soumis aux efforts extérieurs représentés sur la figure 2: une force  $F$  inclinée (dans le plan  $x-z$ ), répartie uniformément sur la surface supérieure et une pression  $P$  sur 2 parois latérales. Déterminer le tenseur des contraintes dans les axes  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  en fonction de  $L, P, F$  et l'angle  $\alpha$  en supposant le champ homogène.
- 2) Un solide de forme cylindrique est soumis aux efforts extérieurs représentés sur la figure 2 : une force  $F$  verticale et un couple  $C$ , répartis sur la surface supérieure et une pression  $P$  sur la surface latérale. Déterminer le tenseur des contraintes dans les axes  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  en fonction des dimensions du cylindre (rayon  $R$  et hauteur  $H$ ) et de  $F, C$  et  $P$ .

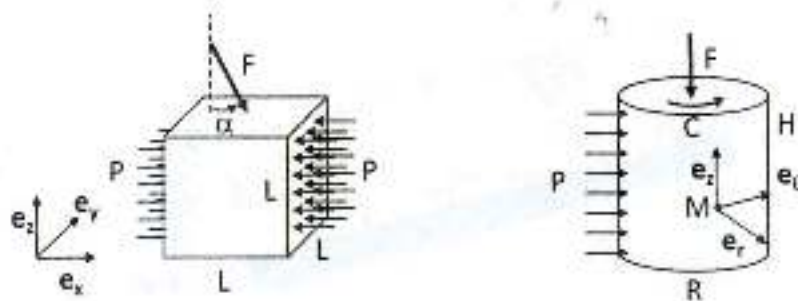


Figure 2 – Efforts sur un cube et sur un cylindre

**Problème 1 :** Compression confinement d'un cylindre creux (1h - 8pts)

Un cylindre creux de révolution de hauteur  $H$ , de rayon intérieur  $r_0$  et de rayon extérieur  $r_1$  (Figure 3a), est constitué d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Le cylindre est soumis à une pression intérieure  $p_0$  (en  $r = r_0$ ) et à une pression extérieure  $p_1$  (en  $r = r_1$ ). Le déplacement vertical à la base (en  $z = 0$ ) est par ailleurs nul, tandis que sa valeur en tête (en  $z = H$ ) est égale à  $-u_0$  comme l'illustre la figure 3c. Enfin, le champ des déplacements exprimé dans le repère local  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est supposé adopter la forme  $\mathbf{u} = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_z(z)\mathbf{e}_z$ .

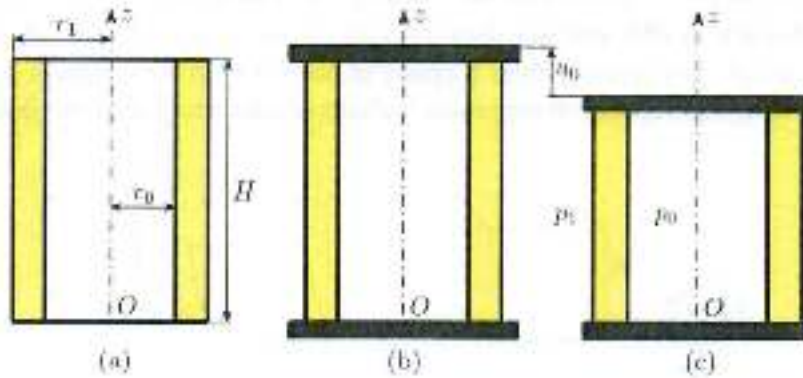


Figure 3 – Compression confinement d'un cylindre creux

- 1) Donner, en fonction des inconnues  $u_r$  et  $u_z$ , l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .
- 2) De l'équation indéfinie de l'équilibre écrite en projection sur  $\mathbf{e}_z$  ainsi que des conditions aux limites cinématiques (i.e. en déplacements), déduire l'expression de  $u_z$ .
- 3) Ecrire l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\mathbf{e}_r$  et en déduire l'équation différentielle ordinaire satisfaite par  $u_r$ .
- 4) Montrer que l'équation établie à la question 3 a pour solution générale  $u_r(r) = Ar + B$ , puis déterminer les constantes  $A$  et  $B$  grâce aux conditions aux limites statiques (i.e. en contraintes).
- 5) Donner, en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $u_0$ ,  $H$  et  $r$ , l'expression finale des composantes non nulles des tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ .

**Problème 2 :** Fluide visqueux sur un plan incliné (50 min - 6pts)

Soient  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  et  $Ox_3$  les axes orthonormés définis de la façon suivante : le plan  $(Ox_1, Ox_2)$  est incliné d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale,  $Ox_1$  est une ligne de pente maximale dirigée vers le bas,  $Ox_2$  est horizontal et  $Ox_3$ , dirigé vers le haut, fait donc l'angle  $\alpha$  avec la verticale ascendante. Un fluide visqueux incompressible et pesant, de masse volumique  $\rho$ , occupe le domaine de l'espace physique compris entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = h$ ,  $h > 0$ . La lave sur la pente d'un volcan est un exemple de ce type problème qu'illustre par ailleurs la figure 4.

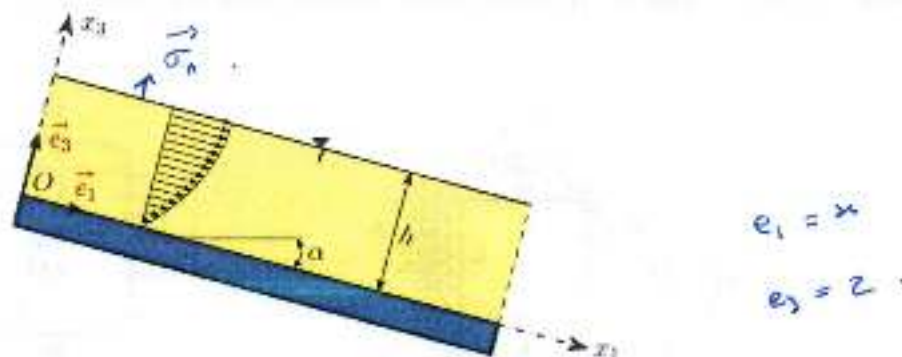


Figure 4 – Fluide visqueux sur un plan incliné

Le champ des vitesses, relativement aux axes précédemment définis, est de la forme  $\mathbf{v} = v(x_3)\mathbf{e}_1$ , où  $v$  est une fonction inconnue de la variable d'espace  $x_3$  que l'on se propose de déterminer. Le champ des pressions adopte quant à lui la forme  $p = p(x_1, x_3)$ . Le fluide est soumis, sur sa surface libre  $x_3 = h$ , à la pression atmosphérique  $p_{atm}$ . Il vérifie par ailleurs la condition d'adhérence avec le plan  $x_3 = 0$ . Enfin on désigne par  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Le fluide est supposé newtonien, de viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$ .

- 1) Donner, après avoir vérifié l'incompressibilité, les équations différentielles dont  $v$  et  $p$  sont solutions.
- 2) Ecrire la condition d'adhérence du fluide avec le plan  $x_3 = 0$  puis donner l'expression du vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_n$  sur les facettes de normale  $\mathbf{e}_3$  du plan  $x_3 = h$ . Quelles relations doivent alors vérifier  $p(x_1, x_3)$  et  $v'(x_3)$  en  $x_3 = h$  ?
- 3) Dédire des questions 2 et 3 les expressions de  $p$  et  $v$  ainsi que celles des tenseurs des taux de déformation  $\mathbf{D}$  et des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (on donnera ces expressions en fonction de  $p_{atm}$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $\eta$  et  $x_3$ ).