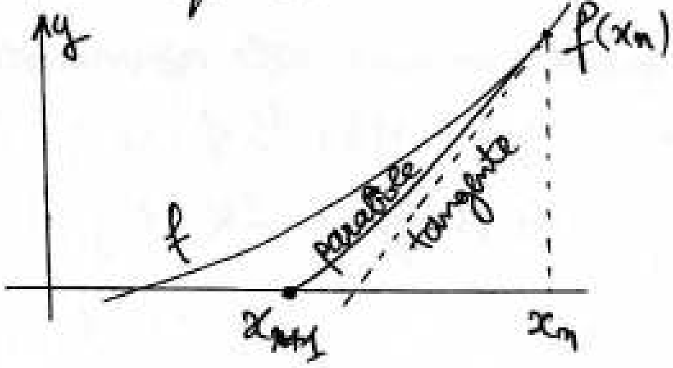
2006

Deuxième test de Calcul scientifique. Promo A

Exercice (1, 2, 2, 2)

On cherche à approcher numériquement une racine simple $\bar{x}$ de l'équation $f(x)=0$ où f est suffisamment régulière.
En partant de $x_0 \in \mathbb{R}$, on construit une suite $\{x_n\}$ pour laquelle x_{n+1} est racine de l'équation $y(x) = 0$ où $y(x)$ est l'équation de la parabole osculatrice à f en x_n.



1) Écrire l'équation de la parabole osculatrice* à f en x_n.

2) Montrer que si x_n est suffisamment proche de $\bar{x}$, on peut exprimer x_{n+1} explicitement en fonction de x_n, f, f' et f''

3) A-t-on convergence locale de la méthode ?

4) En partant de $x_0 = 1$, déterminer avec cette méthode la plus petite racine positive strictement de l'équation

$$\tan(x) - 2x = 0$$

On utilisera 8 décimales et on donnera les différentes itérations utilisées.

* même dérivée en x_n, même dérivée'', même valeur en x_n

Problème (1, 4, 3, 5)

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t) = f(t, y(t)) \end{cases}$

1) En utilisant la formule d'intégration approchée de Simpson :

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt \simeq \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{ g(\alpha) + 4 g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + g(\beta) \right\}$$

donner une approximation de $y(t_{k+1})$ en fonction de f, $y(t_k)$, t_k et $h_k = t_{k+1} - t_k$.

2) Preciser soigneusement comment cette approximation conduit à la méthode à un pas $y_{k+1} = y_k + h_k \Phi(t_k, y_k, h_k)$ où

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}\left\{ K_1(t, y, h) + 2K_2(t, y, h) + 2K_3(t, y, h) + K_4(t, y, h) \right\}$$

où $K_1(t, y, h) = f(t, y)$ $\quad K_2(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} K_1(t, y, h)\right)$

$K_3(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} K_2(t, y, h)\right)$

$K_4(t, y, h) = f\left(t + h, y + h K_3(t, y, h)\right)$

3) On rappelle qu'une méthode à 1 pas est d'ordre $\geq p$ s'il existe $C > 0$ telle que $\| y(t_{k+1}) - y(t_k) - h_k \Phi(t_k, y(t_k), h_k) \| \leq C h_k^{p+1}$.

Montrer qu'elle est d'ordre $\geq p$ si et seulement si

$$\frac{\partial^\ell \Phi}{\partial h^\ell}(t, y, 0) = \frac{1}{\ell+1} f^{(\ell)}(t, y) \qquad 0 \leq \ell \leq p-1$$

où $f^{(0)} = f$, $f^{(j+1)} = \frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} + f \frac{\partial f^{(j)}}{\partial y}$

4) Montrer que cette méthode est au moins d'ordre 3 (elle est en fait d'ordre 4).